VtMat-projekt

Mette Engelbrecht, Kim Pedersen, Morten Hornbech og Jerôme Baltzersen

Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet

Torsdag den 4. januar 2007

1 Problemformulering

I denne opgave vil vi beskæftige os med matematikkens grundlagskrise, der tidsmæssigt foregik omkring 1900-1930. Vi vil begynde med at give en kort opsummering af udvalgte filosofiske retninger, der har indtænkt matematikken i deres systemer, hvorefter vi vil beskrive de hændelser og problemer inden for matematikken i 1800-tallet, der medførte krisen. Vi vil dernæst redegøre for hovedsynspunkterne hos de tre grundlagsprogrammer: Logicismen, intuitionismen og formalismen, der hver på sin måde forsøgte at sikre matematikkens grundlag. Inden for hver af positionerne vil vi afslutte redegørelsen med en kritik og en behandling af de problemer, de hver især giver anledning til.

Efterfølgende vil vi diskutere, hvorvidt det lykkedes de tre programmer at sikre matematikkens grundlag, og vi vil afslutningsvis diskutere, om det overhovedet er muligt at give matematikken et sikkert grundlag, og i så fald, om det kan ligge inden for matematikken selv eller om det er nødvendigt at se på forhold uden for den matematiske virkelighed. Vi vil med udgangspunkt i Reuben Hershs tekst "Some Proposals for Reviving the Philosophy og Mathematics"især diskutere, om et grundlag overhovedet er nødvendigt, hvorefter vi vil konkludere.

2 Optakten til grundlagskrisen

Matematik adskiller sig i væsentlig grad fra andre videnskaber ved, at den matematiske viden der fremkommer, er af en anden type. Til forskel fra de øvrige videnskaber, som er funderet i empiri og observationer, er det beviset, der er basis for de matematiske udsagn. Dette gør at matematisk viden forekommer umiddelbart nødvendig og a priori. Enhver matematisk filosofi må derfor gøre rede for dette faktum, der i så høj grad synes at være kendetegnet ved matematikken som videnskab.

Spørgsmålet om hvilken form for erkendelse, det er muligt at opnå om matematikkens genstandsområde og spørgsmålet om, hvordan vi opnår sikker og nødvendig viden er uløseligt forbundet med erkendelsesteoriens udvikling og tradition. Undersøgelse af matematikkens grundlag angår derfor nogle meget centrale filosofiske problemer. Derfor vil vi i dette afsnit gennemgå to centrale filosofiske retninger, der beskæftiger sig med matematikken. Vi kan af pladsmæssige hensyn dog ikke gå i dybden med de filosofiske positioner, men omtalen skal snarere ses som en lettelse af overgangen til diskussionen af grundlagskrisen. Først diskuteres Platon, som en repræsentant for realismen. Derefter vil vi omtale den empiriske tradition med udgangspunkt i Mill og Hume, og vi vil til slut se på Kants reaktion på empiristerne. Derefter vil vi beskrive de opdagelser inden for matematikken, der førte til behovet for en diskussion om matematikkens grundlag.

3 Filosofisk og historisk baggrund

Den græske filosof Platon (ca. 400 f. kr.) er en af de første, der inddrager matematikken i sit filosofiske system. Platon tager udgangspunkt i pythagoræernes opfattelse om, at alt i verden er tal, og at tal er det eneste virkeligt værende. Platon tager i sin beskrivelse af matematikken, udgangspunkt i sin idélære, der opdeler virkeligheden i hhv. en idéverden og en fænomenverden[1].

Platon mener for det første, at ideerne udgør en norm for fænomenerne, og at alle fænomenerne er dannet efter og har del i ideerne. F.eks. vil alle de cirkler vi forsøger at tegne aldrig nogensinde være magen til den ideelle cirkel, men kun afbildninger af denne. Alle cirkler stammer fra ideen cirkel, som kun eksisterer i vores fornuft, men ingen af dem vi ser i vores virkelige verden med sanserne er nøjagtig magen til. Fænomenerne er det ufuldkomne og foranderlige, mens ideerne angiver standarden for det fuldkomne og evige.

For det andet mener Platon, i en eller anden ikke særlig klar forstand, at ideerne virkeliggør det, som fænomenerne kun udtrykker på ufuldkommen vis. Dette hænger - for det tredje - sammen med, at mens fænomenerne kun kan sanses, er ideerne ikke tilgængelige for sanserne, men kun for fornuften.

Platon placerer matematikkens objekter i idéverdenen, og dermed forklarer han, hvorfor matematisk viden er sikker, thi for Platon kan mennesket kun opnå sikker viden om det, der er fuldkomment og evigt, og som vi kan nærme os med vor fornuft. Ethvert faktisk matematisk objekt er ufuldkomment og kontingent, og vil kun repræsentere en uperfekt realisering af den bagvedliggende idé. Matematikere kan opnå viden om matematikkens objekter, fordi de er medfødte i sjælen. Sjælen har før den tog bolig i menneskets krop været i idéverden og lært de matematiske objekter at kende, og når menneskene laver matematik er det i bund og grund intet andet end en generindring af de evige sandheder.

På denne måde bliver Platon repræsentant for en af de mest udbredte opfattelser af, hvad matematiske objekter er, nemlig noget der eksisterer uafhængigt af menneskenes bevidsthed og sanser. Når vi laver matematikken opdager vi altså nogle objektive sandheder, vi konstruerer dem ikke. Dette synspunkt kaldes ontologisk realisme, og det er måske den mest udbredte position blandt nutidens matematikfilosoffer[2]. Da det dog er de færreste, der adopterer Platons epistemologi, men kun godtager Platons ontologi for matematiske objekter, har realisterne et alvorligt problem med at forklare, hvordan vi kan opnå sikker viden om de matematiske objekter[3].

[1] Platon introducerer i første omgang sin idélære for at forklare et sprogligt begreb, nemlig prædikation. Han ønsker at finde ud af, hvordan vi sprogligt f.eks. kan sige, at "hesten er brun". Dette forklarer Platon ud fra idélæren, idet hesten er brun, fordi den participerer eller er delagtig i ideen brun. Vi vil dog ikke diskutere idélæren i de detaljer, som den egentlig fortjener.

[2] F.eks. repræsenterer Steward Shapiro, som har skrevet den bog vi har taget udgangspunkt i, denne position, se f.eks. Shapiro side 257. Vi skal senere i opgaven møde andre realister.

[3] Grunden til at de færreste godtager Platons erkendelseteori er bl.a., at den er unægtelig forbundet med hans idélære. Desuden er han en smule uklar i sin fremstilling af, hvordan man opnår erkendelse af de matematiske sandheder, jf. Shapiro side 52.

Platons efterfølger og opponent Aristoteles lagde grund for en naturfilosofi, der gjorde, at tilgangen til naturvidenskab helt frem til omkring 1600 var spekulativ. I 1620 ændres dette dog med Bacons (1561-1626) bog "Novum Organum", hvor Bacon opstiller nogle nytænkende kriterier for, hvad god videnskab er. Den gode videnskab er ikke længere spekulativ, men skal bygge på observationer og bestemmelse af kausale relationer mellem fænomener ved hjælp af eksperimenter. Naturerkendelsen skal altså bygge på erfaring og undersøgelse, og dermed er grundlaget for empirismen lagt. Empiristerne mener, at sand erkendelse er baseret på sanseerfaring[4], og for radikale empirister som f.eks. Mill (1806-1873) gælder dette også matematikken. Han argumenterer for, at det er muligt at konstruere matematikken på baggrund af sansningen af objekter, som giver anledning til naive talbegreber[5].

Den måske mest fremtrædende empirist Hume (1711-1776) mener dog ikke, at matematikken hører under denne form for erkendelse. Matematik er for ham den eneste form for sikker erkendelse, som er a priori[6]. Dette medfører en dualisme mellem matematik, som værende spekulativ og anden videnskab, som værende bygget på sanseerfaring, og denne dualisme opretholdes og anses som værende objektiv sand i Humes eftertid, på trods af, at Bacons moderne opfattelse af, hvad videnskab er, bliver alment accepteret. Denne dualisme vil vi vende tilbage til i vores diskussion.

Den tyske filosof Kant (1724-1804) er én af de filosoffer, der i høj grad har inspireret den matematiske filosofi. Som vi vil vende tilbage til senere, er nogle af hans tanker bevaret hos de tre grundlagsskoler. Kants filosofi er en reaktion på empirismens problemer med for det første at garantere intersubjektivitet, når det gælder sansning af de matematiske størrelser og for det andet problemet med, hvordan det er muligt at give mening til komplekse matematiske begreber ud fra sanseerfaring[7]. Hvis al viden inkl. matematik stammer fra sanseerfaringer, som vi alle har tilfælles, medfører det, at vi må være sikre på, at alle har et sanseapparat, der fungerer på samme måde.

Kant mener aldrig, at mennesket vil være i stand til at erkende verden, som den er i sig selv. Det kan kun opnå erkendelse af, hvordan verden er set fra den menneskelige synsvinkel. Denne erkendelse er imidlertid stadig at anse som objektiv, fordi den menneskelige erkendelse er struktureret gennem nogle anskuelsesformer og kategorier, som er fælles for alle mennesker. På denne vis bliver mennesket bevidsthed frataget den passive rolle i erkendelse, da erfaringen aktivt struktureres af denne.

Kant kommer via sin metode med transcendental deduktion[8] frem til, at mennesker strukturerer alle erfaringer tidsligt og rummeligt, og disse anskuelsesformer, rum og tid, er forudsætningen for, at vi oplever verden, som vi gør. På tilsvarende vis kommer han frem til, at mennesket oplever i enhed, flerhed, kausalitet og andre basale strukturer - kategorierne[9].

[4]Empiristerne repræsenterer ofte det modsatte af Platons realisme, nemlig ontologisk anti-realisme. Denne indstilling til videnskab består i, at man ikke er interesseret i eller mener det er muligt at beskrive virkeligheden som den er. Det vigtige er, at den teori der opstilles virker, og så er det i anden række, om det stemmer overens med den virkelige virkelighed. Man opdeler også anti-realismen i pragmatisme og instrumentalisme, men det vil vi ikke komme nærmere ind på her.

[5]Shapiro side 94ff

[6]Shapiro side 75

[7]Shapiro side 76f

[8]Kants egen betegnelse for sin metode.

[9]Kant finder frem til præcis 12 kategorier, som indeholder f.eks. substanskategorien, kausalitet og lign. At der netop er 12 stk. skal nok ikke tages alt for højtideligt, for Kant havde en tendens til en vis form for pedanteri, hvor han godt kunne lide specifikke tal.

Kant opdeler viden i a priori (nødvendig viden, der går forud for erfaringen) og a posteriori (kontingent viden, der er baseret på erfaring). Hver af disse opdeler han igen i analytisk viden (begrebsmæssig) og syntetisk viden (viden som syntese mellem begreber og sansninger). Hume og mange andre empirister, der hyldede hans dualisme mente kun, at det var muligt at have analytisk a priori viden og syntetisk a posteriori viden, og de placerede matematikken i den første type. Kants filosofi resulterer dog i, at det er muligt at have syntetisk a priori viden, og det er dér matematikken placeres[10] .

Kant knytter matematikken sammen med de to anskuelsesformer. Han sammenkobler aritmetikken til den basale intuition om enheder og tid, mens geometrien mere oplagt sammenknyttes med den intuitive rumopfattelse. Da matematikken er en undersøgelse af anskuelsesformerne, som er nødvendige, bliver aritmetik og geometri samtidig a priori viden, og da matematikken netop opstår i anskuelsen, er det en syntetisk viden[11].

Trods en senere påpegning af forskellige problemer ved Kants filosofi, f.eks. hans antagelse om, at alle mennesker har de samme anskuelsesformer, har han inspireret hele den vestlige tankegang inden for både filosofi og matematik, og mange af hans tanker har overlevet helt frem til i dag. Vi vil nu gennemgå nogle af de opdagelser, der både viste nogle af problemerne ved Kants matematikfilosofi og som samtidig blev optakten til grundlagskrisen.

4 Nyopdagelser

Et af de vigtigste bidrag til matematikken sker omkring 320 f. kr., hvor matematikkens viden samles i Euklids Elementer. Dette værk bliver i den grad bestemmende for, hvordan matematikerne fremover anvender den logisk deduktive metode, og dets indhold udgjorde den altdominerede autoritet inden for geometrien indtil midten af 1800-tallet.

I Euklids Elementer indgår bl.a. et meget omdiskuteret femte aksiom, parallelaksiomet. Da aksiomet ikke virker så fundamentalt som de øvrige aksiomer, havde aksiomets status i lang tid været forsøgt bestemt[12]. Til sidst undersøgte man, om det var muligt at konstruere alternative geometrier, hvis man udelod aksiomet uden derved at miste konsistensen. Det viste sig muligt, og med opdagelse af den ikke-euklidiske geometri måtte man opgive ideen om, at den euklidiske geometri var den eneste beskrivelse af rummet. Den euklidiske geometri som i mere end 2000 år havde været anset som den eneste mulige, blev derved reduceret til at være et særtilfælde blandt mange geometrier[13].

Dette var naturligvis en stor opdagelse for datidens matematikkere, men det blev et dødsstød for Kants idé om, at den euklidiske geometri repræsenterede en objektiv sand måde at beskrive rummet på, og samtidig var det også et brud med den almene intuitive rumopfattelse. Den a prioriske sandhed, som Kant havde tillagt geometrien kunne altså ikke opretholdes. Hans tid og talbegreb var dog mere sejlivet, hvilket vi vil se på under gennemgangen af grundlagsskolerne.

[10] Kant §1-3

[11] Kant §6-13.

[12] Man havde bl.a. forsøgt at finde ud af, om det var afhængigt af de andre og således var overflødigt, men det var ikke muligt at finde en sådan afhængighed.

[13] Shapiro side 84ff samt Hersh side 14-15

En anden ting, der voldte problemer for matematikernes måde at betragte deres fag på, var udforskningen af uendelighedsbegrebet[14]. Omkring 1870 fremsætter Cantor (1845-1918) sin undersøgelse om uendelighedsbegrebet i form af hans teori om transfinite tal. Med sin definition af kardinalitet viser Cantor bl.a., at de naturlige tals uendelighed er af en anden type end de reelle tals. Der findes altså mere end blot én slags uendelighed. Det forekommer for de fleste mennesker temmelig kontraintuitivt, at der findes andre uendeligheder end den vi til nød kan forestille os ved en uendelig talrække, så derfor gav udforskningen af uendelighedsbegrebet endnu en grund til at tvivle på den intuition, som matematikken ellers havde været opbygget omkring.

Et tredje eksempel på nyopdagelser inden for matematikken, der bryder matematikernes intuitive begrebsopfattelse er de såkaldte monster-funktioner. Et eksempel er de såkaldte space-filling-curves, som blev opdaget af Peano i 1890. Disse kurver, med uendelig længde og et areal, der var større end nul, var i høj grad i modstrid med den geometriske intuition. Et andet eksempel er nogle sære funktioner, der var overalt kontinuerte, men intetsteds differentiable[15].

1800-tallet var en meget frugtbar periode for matematikkens udvikling, men de mange nye opdagelser medførte også store erkendelsesteoretiske problemer for matematikken, fordi de rammer, inden for hvilke matematikken tidligere havde været set, blev sprængt. Derfor blev det sværere at fastslå, hvordan den viden man havde, kunne opfattes som sikker.

Disse tre nyopdagelser inden for matematikken er alle eksempler på, hvorfor man blandt matematikkere også kalder 1800-tallet for katastrofernes århundrede. Katastrofen ligger i, at den helt basale intuition, som hidtil havde ligget til grund for og legitimeret matematikken, ikke længere kunne benyttes. Opdagelserne efterlod matematikerne i dilemmaet mellem fortsat at stole på deres intuition, der havde vist sig ikke at stemme overens med de matematiske opdagelser, der var blevet gjort, eller at stole på analysen, der havde frembragt disse nye opdagelser. Resultatet blev, at man måtte tvivle på sin intuition som grundlaget for matematikken, og det er netop denne forkastelse af det hidtidige grundlag, der motiverede tre forsøg på at sikre matematikken et sikkert grundlag[16].

Vi vil nu redegøre for tre bidrag til at forsøge at løse det problem der opstod. Problemet kaldes matematikkens grundlagskrise, fordi til trods for, at matematikken udviklede sig meget i disse år, foregik det på et aldeles usikkert og tvivlsomt epistemologisk og ontologisk grundlag.

5 Logicisme

Afsnittet hovedsageligt baseret på Shapiro p. 107-124, Skovsmose p. 33-45 samt enkeltopslag i artiklerne om Russell og Frege på Wikipedia.org

[14] Det havde længe været kendt, at uendelighedsbegrebet medførte paradokser som f.eks., at der er lige så mange lige tal som der er hele tal, selvom de lige tal er en ægte delmængde af de hele tal.

[15] Et eksempel på en sådan særling er Karl Weierstrass' funktion: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot \cos(b^n \cdot \pi x)$

[16] "A greater disaster was the development of analysis so it overtook geometrical intuition []. The loss of certainty in geometry was philosophically intolerable, because it implied the loss of all certainty in human knowledge ", Hersh side 15

5.1 Gottlob Frege

I den kantianske skole var matematikken som sagt funderet i de rumlige og tidslige intuitioner, og matematiske sandheder blev derfor kategoriseret som *syntetiske* og *a priori*.

For at frigøre matematikken fra de tvivlsomme rumlige og tidslige intuitioner forsøgte Gottlob Frege i stedet at kategorisere matematik som *analytisk* og *a priori* viden. Frege anlægger dog en mere logisk begrundet forståelse af begrebet analytisk a priori end Kant[17] og betegner en sætning som analytisk a priori, hvis dens sandhed udelukkende kan begrundes (sætningen kan bevises) ved brug af definitioner og generelle logiske love.

Det var derfor Freges mål at vise, at enhver sandhed om de naturlige tal og de reelle tal kan vises ved udelukkende at benytte analytiske a priori sætninger.[18] Altså at bevise matematikken ved hjælp af den klassiske logik, og Freges projekt benævnes generelt logicisme.

Frege benytter i sin logik termer som *objekt* og *koncept*. Det er grammatiske begreber, der knytter sig til såkaldte singulære sætninger, som i deres opbygning ligner matematiske ligheder, en ide Frege netop lånte fra matematikkens sætninger. For simpelhedens skyld vil vi ikke gå dybere ind i den grammatiske, men i det følgende tale om objekter som elementer/egennavne, mens koncepter er mulige egenskaber ved disse elementer.[19]

Freges første skridt var at definere to koncepter som ligetallige, hvis der er en en-til-en korrespondance imellem de objekter, der falder ind under det ene koncept og de objekter der falder ind under det andet koncept. Han indfører derpå sit såkaldte *Humes princip*:

> For hver to koncepter, F og G, er tallet for F identisk med tallet for G, hvis og kun hvis F og G er ligetallige.

Her refererer Frege til 'tallet for F' som et objekt[20]. Betragt nu konceptet 'ikke identisk med sig selv'. Der findes ingen objekter med denne egenskab, hvorfor tallet nul identificeres som tallet for dette koncept. Ved at indføre 'efterfølger'-relationen

> I rækken af naturlige tal følger tallet n direkte efter m hvis og kun hvis, der eksisterer et koncept F og et objekt x, der falder under det, således at tallet for konceptet F er n, og tallet for konceptet 'falder under F men ikke identisk med x' er m.[21]

Lad nu T betegne konceptet 'identisk med nul'. For ethvert objekt b gælder Tb hvis og kun hvis $b = 0$, så Tb indeholder kun *et* objekt, hvorfor tallet for T er 1. Tilsvarende er 2 tallet for konceptet 'enten identisk med 0 eller identisk med 1'. Og Frege kan ved hjælp af efterfølger-relationen nu f.eks. vise at tallet 2 efterfølger tallet

[17] Hos Kant beror klassifikationen af sætninger ud fra en analyse af deres enkelt dele. Her er f.eks. en sætning på subjekt-prædikatform analytisk, hvis subjektets koncept indeholder prædikatets koncept.

[18] Frege mener altså, at alle matematiske sætninger har en sandhedsværdi, og han er altså realist i sandhedsværdier (semantisk realisme).

[19] Elementet en cirkel har f.eks. den egenskab at den er rund.

[20] At Frege tilskriver tal til koncepter uden først at konstruere tallet klassificerer ham som ontologisk realist med hensyn til eksistensen af de naturlige tal.

[21] Eksempelvis vil 'n efterfølge m' hvis der findes en egenskab ,'det at være en kuglepen på mit skrivebord', som har tallet n mens tallet for egenskaben, 'at være en kuglepen på mit skrivebord undtagen den blå', er m.

1 og tallet 1 efterfølger tallet 0, og herfra er der ikke langt til at vise at der eksisterer uendeligt mange tal.

Ud fra disse redskaber var det nu muligt for Frege at definere de naturlige tal,

> n er et naturligt tal hvis og kun hvis 'vi for ethvert koncept F hvor F gælder for tallet nul og for ethvert objekt d, kan vi ud fra sætningen 'd falder under F' slutte at enhver efterfølger til d falder under F, så falder også n under F'.

Derefter kunne han endda udlede flere grundlæggende principper som f.eks. induktionsprincippet. Det ser med andre ord ud til Freges projekt er lykkedes. Dog er der endnu et uafklaret problem: Hverken Humes princip eller efterfølger-relationen kan afgøre om et tal a er identisk med tallet for et koncept F.

Frege var derfor tvunget til at indføre *udvidelsen af et koncept* som klassen af alle de objekter som konceptet gælder for. Vi vil ganske intuitivt forstå udvidelser som mængder af elementer. Derpå indførte Frege at

> Tallet for konceptet F er udvidelsen af konceptet 'ligetallig med tallet F'.

Omsat til mængdeteori vil tallet for en mængde A være mængden af alle mængder der er ligetallige med A.

Tilbage er nu at tilbageføre hele den matematiske analyse til de grundlæggende logiske love. Det er morsomt at bemærke, at Frege ikke forsøger at udvide sin logicisme til geometrien, men det viser sig at han har en meget kantiansk tilgang til netop denne. Ligesom Kant kategoriserer han den som syntetisk og a priori, og giver den sit eget specielle rum.

I sit færdigudviklede system *Grundgesetze der Aritmetik* præsenterer Frege en fuldstændig udgave af sit logicistiske system. For logicismens videre udvikling har specielt hans Grundlæggende femte lov interesse:

> For hver to koncepter, F og G, er udvidelsen af F identisk med udvidelsen af G hvis og kun hvis, der for hvert objekt a gælder at 'Fa hvis og kun hvis Ga'.[22]

I 1901 bemærkede Betrand Russell nemlig at der findes et modeksempel til denne lov. I en moderne mængdeteoretisk udgave lyder Russells paradoks

> Lad $M = M' = \{A|A \notin A\}$. Ifølge Freges logiske system er dette en veldefineret mængde. Antager vi at $M \in M'$, så kan vi ved at benytte definitionen se at $M' \notin M'$, og derfor følger af den Grundlæggende femte lov, at $M \neq M'$ hvilket er i modstrid med definitionen.

Russells kritik af den Grundlæggende Femte Lov fik Frege til derpå helt at opgive det logicistiske projekt, men hvor Frege slap fortsatte Russell.

5.2 Russell og Whitehead

Lad os begynde med at benævne definitionen af et matematisk objekt for impredikativ, hvis den referer til en mængde af objekter der indeholder det definerede objekt

[22] I moderne mængdeteori ved vi, at der for to mængder F, G gælder at $F = G$ hvis og kun hvis der for alle a gælder at $a \in F \Leftrightarrow a \in G$.

selv[23].

Ved at forbyde impredikative definitioner kan Russell undgå sit eget paradoks, da definitionen af mængderne M og M' ikke er tilladt. Russell mente, at det er klart at impredikative definitioner er en form for cirkelslutning. Han finder det meningsløst at tale om, at en klasse er medlem af sig selv eller modsat, at en klasse ikke er medlem af sig selv. Han taler i den sammenhæng om forbuddet af impredikative definitioner som den 'onde cirkels princip'.

Med denne viden indleder Russell og hans vejleder Alfred North Whitehead deres logicistiske redningsarbejde. Først indfører de en opdeling af klasser[24] og objekter i typer,

- type 0 : Objekter der ikke også er klasser
- type 1 : Klasser af type 0 objekter
- type 2: Klasser af type 1 objekter $\vdots$

Ved at kræve, at man i definitioner kun må benytte objekter af samme type, inkorporerer de den 'onde cirkels princip' i sit logiske system. Det er nu Russells projekt at vise, at man på trods af denne typerestriktion fortsat kan tilbageføre matematikken til grundlæggende logiske love. Til at begynde med tyder projektets fremtid godt. Med en typeopdeling forsimples Freges definition af de naturlige tal. Man kan definere tallet for klassen C, som klassen af alle de klasser, der er ligetallige med C. F.eks. kan C være en type 1 klasse, hvorfor tallet for C er en type 2 klasse. Russell og Whitehead kan derfor definere naturlige tal som 'alt hvad der er tallet for en klasse'. De forskellige naturlige tal bliver da

tal	definition	type
0	klassen af alle type 1 klasser der ingen medlemmer har	type 2
1	klassen af alle type 1 klasser der har netop et medlem	type 2
2	klassen af alle type 1 klasser der har netop to medlemmer	type 2
	$\vdots$	

Et lille minus er at Russells definition af de naturlige tal direkte afhænger af antallet af type 0 klasser. Hvis der kun findes 324 sådanne type 0 klasser, eksisterer der også kun 324 naturlige tal[25]. Som en udvej antager Russell 'uendelighedsaksiomet' ifølge hvilket, der findes uendeligt mange naturlige tal.

Her er det værd at huske, at Frege faktisk viste at ethvert naturligt tal eksisterer, hvorimod Russell tvinges til at gøre antagelsen, og logicismen altså bliver lidt mere hypotetisk. Det ser ikke længere ud til, at man kan føre hele aritmetikken tilbage til logikken, hvilket må siges at være et væsentligt problem. Grunden til at indførelsen af aksiomet ikke fremhæves som det væsentligste problem, skyldes nok at uendelighed er et forholdsvis intuitivt begreb der måske også tillægges en vis a priori status. Russell og Whiteheads næste skridt er at definere begrebet *naturligt tal*, ved at overføre Freges argumentation til sin typeteori:

[23] Definitionen af *mindste øvre grænse* er impredikativ da den referer til mængden af øvre grænser og specielt karakteriserer et element i denne mængde.

[24] Russells terminologi for udvidelser

[25] Problemet er at Freges bevis for at der er uendelig mange tal falder under Russells 'onde cirkels princip'. Hvis man forsøger at overføre argumentationen til Russells type-teori, løber man også ind i problemer. Frege definerer tallet 1 som klassen der kun indeholder tallet 0, og 1 er derfor af type tre. Men 2 er så klassen der består af både tallet 1 og tallet 0. Men vi har lige set at tallene 1 og 0 har forskellig type, og derfor ikke kan sammensættes i en klasse.

> n er et naturligt tal hvis n tilhører enhver (type 3) klasse der indeholder tallet 0 og også indeholder efterfølgeren af hver af dets elementer.

Problemet er at denne definition er impredikativ, og Russell og Whitehead er derfor tvunget til at indføre en finere inddeling af hver type, de såkaldte niveauer (eng. term level):

- type 1 klasse
  - niveau 0 : klasser der kan defineres uden at tale om klasser
  - niveau 1 : klasser der ikke er tilhører niveau 0 og kan defineres så der højst tales om type 1 niveau 1 klasser
  - niveau 2 : klasser der ikke tilhører niveau 0 og niveau 1 og kan defineres så man kun taler om type 1 niveau 1 klasser
  - ...
- type 2 klasse
  - niveau 0 : klasser der kan defineres uden at tale om klasser
  - ...
- ...

Når Russell og Whitehead i definitionen af de naturlige tal således taler om 'enhver klasse', henviser han altså til enhver klasse og ethvert niveau, hvorved han tilfredsstiller den 'onde cirkels princip. Men denne niveau-opdelings-teori (eng. term 'ramified type theory'), afføder en række problemer for den videre udvikling af logicismen til at gælde hele matematikken, og eksempelvis kan Freges udledning af induktionsprincippet ikke overføres hertil.

For at imødegå disse problemer indførte Russell og Whitehead reducibilitetsaksiomet:

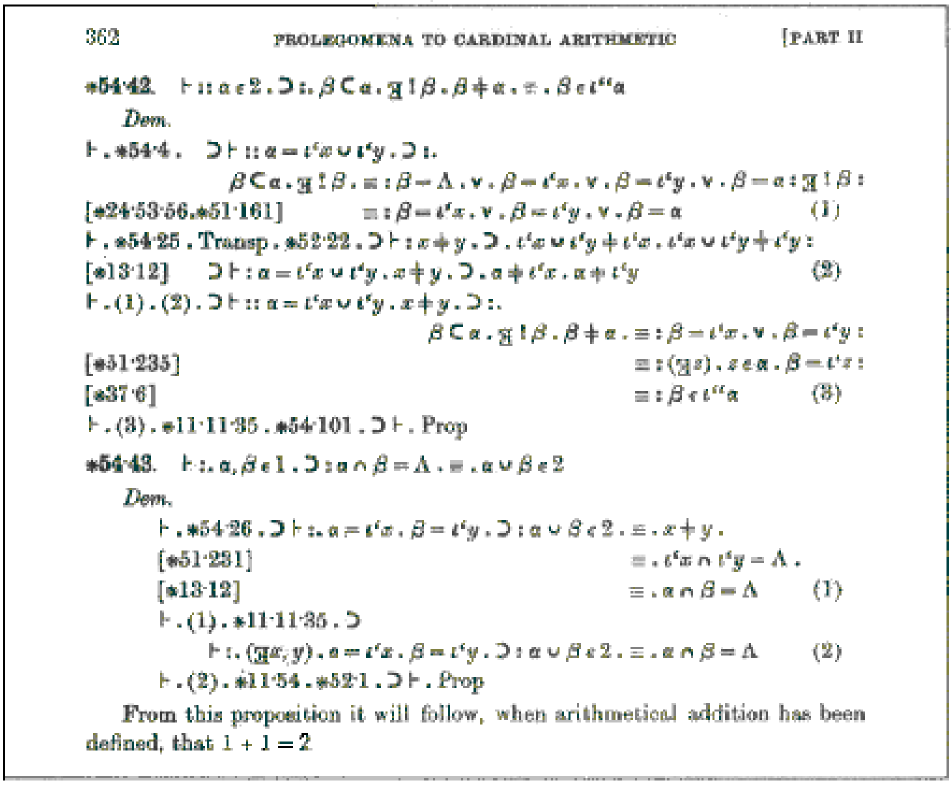
> For hver type gælder for enhver klasse c, at der findes en niveau 0 klasse c' som indeholder de samme elementer som c.

Det vil sige at der ikke findes klasser med højere niveau end niveau 1 klasser.

Desværre var reducibilitetesaksiomet langt mere problematisk end de problemer det var skabt til at løse. Reducibilitetsaksiomet virker hverken intuitivt eller videre l-ogisk, og man kan ikke på samme måde som med uendelighedsaksiomet antage at reducibilitetsaksiomet er a priori givent. Konsekvensen af kritikken var, at selv Russell indrømmede at reducibilitetsaksiomet var en fejl i hans logicisme.

Ud fra uendelighedsaksiomet og reducibilitetsaksiomet etablerede Russell og Whitehead de kendte Peano aksiomer for aritmetikken. De anvendte derefter deres logicisme på mere og mere avanceret matematik, mens de undervejs konstruerede typer af højere og højere orden. Dette inkluderer både positive og negative tal og brøker. For at anvende logicisme på den reelle og komplekse analyse var det dog nødvendigt at antage eksistensen af udvalgsaksiomet[26]. Alle disse overvejelser og udledninger blev udgivet i den svært tilgængelige *Principia Mathematica*. Figur 1 viser et udklip fra Principias side 379, der viser udledningen af at $1 + 1 = 2$.

[26] I moderne mængdeteori lyder udvalgsaksiomet: For en mængde X af ikke-tomme komplementære mængder, kan man konstruere mindst en mængde der indeholder præcis et element af hver mængde i X.



362 PROLEGOMENA TO CARDINAL ARITHMETIC [PART II

$*54 \cdot 42.\ \vdash :: \alpha \in 2 . \supset :. \beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv . \beta \in \iota `` \alpha$

Dem.

$\vdash . *54 \cdot 4 . \quad \supset \vdash :: \alpha = \iota ` x \cup \iota ` y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \equiv : \beta = \Lambda . \vee . \beta = \iota ` x . \vee . \beta = \iota ` y . \vee . \beta = \alpha : \exists ! \beta :$

$[*24 \cdot 53 \cdot 56 . *51 \cdot 161] \quad \equiv : \beta = \iota ` x . \vee . \beta = \iota ` y . \vee . \beta = \alpha \qquad (1)$

$\vdash . *54 \cdot 25 . \mathrm{Transp} . *52 \cdot 22 . \supset \vdash : x \neq y . \supset . \iota ` x \cup \iota ` y \neq \iota ` x . \iota ` x \cup \iota ` y \neq \iota ` y :$

$[*13 \cdot 12] \quad \supset \vdash : \alpha = \iota ` x \cup \iota ` y . x \neq y . \supset . \alpha \neq \iota ` x . \alpha \neq \iota ` y \qquad (2)$

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash :: \alpha = \iota ` x \cup \iota ` y . x \neq y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv : \beta = \iota ` x . \vee . \beta = \iota ` y :$

$[*51 \cdot 235] \quad \equiv : (\exists z) . z \in \alpha . \beta = \iota ` z :$

$[*37 \cdot 6] \quad \equiv : \beta \in \iota `` \alpha \qquad (3)$

$\vdash . (3) . *11 \cdot 11 \cdot 35 . *54 \cdot 101 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

$*54 \cdot 43.\ \vdash :. \alpha , \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54 \cdot 26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota ` x . \beta = \iota ` y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[*51 \cdot 231] \quad \equiv . \iota ` x \cap \iota ` y = \Lambda .$

$[*13 \cdot 12] \quad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *11 \cdot 11 \cdot 35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x , y) . \alpha = \iota ` x . \beta = \iota ` y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . *11 \cdot 54 . *52 \cdot 1 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$

Figur 1: Udklip fra *Principia Mathematica* hvor der vises at 1+1=2

5.3 Kritik

Det er vigtigt at gøre sig klart at det logicistiske projekt ikke forsøger at forklare hverken matematikkens historiske udvikling, hvordan man arbejder med matematikken eller hvorfor vi har udviklet lige præcis de matematiske systemer vi kender i dag. Logicismen har kun til formål at tilbageføre netop de matematiske systemer vi kender i dag til den klassiske logik. Det kan så forekomme mere eller mindre tilfældigt, at netop den matematik der er blevet udviklet skulle basere sig på de grundlæggende logiske love.

Den væsentligste kritik af Russells og Whiteheads logicisme ligger i brugen af reducibilitetsaksiomet. For det første kan aksiomet ikke vises logisk og endvidere er hovedindholdet i aksiomet et forsøg på at omgå 'den onde cirkels princip', et princip der udgør grundstammen i deres arbejder. Brugen af reducibilitetsaksiomet strider altså imod selve formålet med det logicistiske projekt, og det er derfor også klart, at Russell selv anerkender aksiomet som en fejl i sin logicisme.

Heller ikke uendelighedsaksiomet eller udvalgsaksiomet kan begrundes logisk, omend disse aksiomer forekommer mere intuitive og grundlæggende end reducibilitetsaksiomet. Selv hvis logicismen var lykkedes, kan man stille sig tvivlende over for Frege og Russells 'grundlæggende logiske love'. Er de overhovedet så grundlæggende som vi tror? Og hvordan afgør man deres 'grundlæggende natur'?

6 Intuitionisme

Intuitionismen er det andet af de tre forsøg på at forklare matematikkens grundlag, som vi behandler i denne opgave. Især L.E.J Brouwer (1881-1966) har været varm fortaler for intuitionismen lige siden hans doktorafhandling 1907. Som allerede beskrevet havde det 18. århundrere været fuldt med matematiske opdagelser som enten var kontraintuitive eller som gav anledning til direkte paradokser. Brouwer og andre intuitionister følte, at dette var indre modstrid i den klassiske matematik. Løsningen var at opbygge matematikken fra bunden af under korrekte antagelser, og derved undgå paradokser. Det er altså ikke intuitionismens hensigt at forklare eller reparare den klassiske matematik, men derimod at begynde fra et sikkert fundament, og se, hvor det fører os hen.

> According to [Brouwer's] view and reading of history, classical logic was abstracted from the mathematics of finite sets and their subsets. ... Forgetful of this limited origin, one afterwards mistook that logic for something above and prior to all mathematics, and finally applied it, without justification, to the mathematics of infinite sets. This is the Fall and original sin of set theory, for which it is justly punished by the antinomies. It is not that such contradictions showed up that is surprising, but that they showed up at such a late stage of the game. (citeret i Kline 1972, p. 2001)

Intuitionisme svar på 'hvor kommer matematikken fra?', er at matematikken er frit skabt af matematikerens tankekraft, og at et matematisk objekt eksisterer hvis og kun hvis det kan konstrueres mentalt. Tilhængere af intuitionisme bliver derfor unægteligt nødt til at anlægge et konstruktivistisk synspunkt på matematiske objekter, hvilket vi vil gå i dybden med lige straks. Dog er det først vigtigt at gøre sig klart, hvad forskellen mellem intuitionisme og konstruktivisme er: Hvor motivationen for konstruktivisme er ønsket om at kunne beregne alle ens resultater via en algoritme, er grundlaget for intuitionisme som sagt et ganske andet: Matematikken er en kreation af den enkelte matematikers tankekraft, og bliver således et subjektivt begreb (altså solipsistisk[27]). Konstruktivismen derimod forbliver objektivt af grunde som vi nu vil diskutere.

Konstruktivister - og dermed altså også intuitionismer - fortolker udsagnet 'der eksisterer et objekt x' anderledes end en matematiker, som er tilhænger af den klassiske fortolkning (herefter benævnt 'den klassiske matematiker'). Kontruktivisten sætter 'der eksisterer' lig med 'det kan kontrueres'.

En ved første blik uskyldig forskel mellem klassisk matematik (klas.) og kontruktivistiske matematik (kon.) er forskellen i fortolkningen af udsagnet $P \vee Q$. I klas. betyder det blot, at enten er P sandt eller også er Q sandt, hvorimod det i den kon. også skal kunne afgøres, hvilket af de to (og selvfølgelig evt. begge) der er sande. Denne ikke særlig komplicerede forskel fører til problemer, navnligt når Q erstattes af $\neg P$. Hvor den klassiske matematiker vil mene, at $P \vee \neg P$ altid er sandt, vil konstruktivisten først godtage udsagnet som sandt, når vedkommende har vist, hvorvidt det nu er P eller $\neg P$ som er sandt. Som eksempel kan Riemann-hypotesen kaldet RH nævnes: Den klassiske matematiker vil altså mene, at $RH \vee \neg RH$ er en tautologi, hvorimod konstruktivisten ikke vil kunne afgøre udsagnet rigtighed før end

[27] Solipsisme er den metafysiske teori, at ens eget jeg er det eneste eksisterende jeg. Det er betegnelsen for den filosofiske anskuelsesvinkel, hvorunder verden i sig selv kun er perciperet af én enkelt person, og eksistensen af andre bevidstheder således ikke bare betvivles, men benægtes.

$\vee$ (or)	to prove $P \vee Q$ we must have either a proof of P or a proof of Q.
$\wedge$ (and)	to prove $P \wedge Q$ we must have a proof of P and a proof of Q.
$\Rightarrow$ (implies)	a proof of $P \Rightarrow Q$ is an algorithm that converts a proof of P into a proof of Q.
$\neg$ (not)	to prove P we must show that P implies $0 = 1$.
$\exists$ (there exists)	to prove $\exists x P(x)$ we must construct an object x and prove that $P(x)$ holds.
$\forall$ (for each/all)	a proof of $\forall x P(x)$ is an algorithm that, applied to any object x, proves that $P(x)$ holds.

Tabel 1: Intuitionistisk Logik

RH enten er bevist eller modbevist. Det er altså klart, at konstruktivisten ikke kan være semantisk realist.

De fleste af os er opfostret med en symmetrisk tankegang, hvad udsagn angår: $\neg\forall x \neg P(x) \equiv \exists x P(x)$, og på den måde undgår vi ofte at skulle konstruere egentlig algoritmer for at finde x idet vi beviser

$$\neg\forall x \neg P(x) \quad \text{i stedet for} \quad \exists x P(x)$$

i den tro, at de to udsagn er ækvivalente. Men for en konstruktivist er der forskel på at konstruere et x så $P(x)$ er sandt, og på at vise, at det ikke gælder for alle x at ikke $P(x)$ er sandt. Ligeledes ser den klassiske matematiker en ækvivalens mellem $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$ og $P \vee Q$. Denne, ifølge konstruktivisterne, idealiserede tro fører til en række kompromiser, hvad beregnelighed angår. Et eksempel på dette ses blandt andet følgende sætning (kendt fra pensum): Der eksisterer to irrationelle tal a og b således, at a^b er rationelt. Beviset er klart ikke kontruktivt. For at summere får vi altså en logik, der ser ud som følger:

Ønsket om en sådan logik beror altså på forestillingen om, at matematiske sætninger i videst muligt omfang udtaler sig om objekter, der kontrueres og 'fremvises'. Ved denne fremgangsmåde sikrer man sig naturligvis imod paradokser i stil med Russells paradoks.

Efter at have forstået det konstruktivistiske synspunkt langt bedre, kan vi nu komme med en konkret forskel i forhold til intuitionismen. Intuitionismen generaliserer definitionen af en følge fra konstruktivismen, idet man i konstruktivismen ønsker at have en algoritme, hvorved man direkte kan finde det $n$te led. Brouwer generaliserede dette følge-begreb til, at det $n$te led kan bestemmes frit, blot man på forhånd har angivet nogle regler der skal følges. Hermed bliver det også klart, hvad der menes, med 'at matematiske objekter skal kunne konstrueres mentalt'.

I modsætning til logicismen, og som vi senere skal se formalismen, hvor man kan finde interne paradokser i deres matematik og grundlag for denne, er dette ikke muligt i konstruktivismen/intuitionismen, da alle entiteter er konstruerbare og derfor ikke kan være i modstrid med hinanden. Ønsker man at arbejde som konstruktivist skal man blot benytte den intuitionistiske logik, der sikrer, at man bliver inden for det konstruerbare paradigme. Desværre for intuitionismen har Hilberts 'skræmme-kampagne' fået mange matematikere til at tro, at store dele af matematikken går tabt, hvis man anlægger et konstruktivistisk/intuitionistisk synspunkt.

Der er naturligvis nogle sætninger der går tabt, men langt det meste af den moderne matematik kan og er blevet reproduceret inden for et konstruktivistisk synspunkt. Desuden lover den tætte sammenknytning mellem konstruktivisme og datalogi lovende for konstruktivisterne. Det er dog disse mangler samt til dels formalisternes 'skræmme-kampagne', som har gjort, at intuitionismen ikke har vundet indpas i det matematiske verdenssamfund.

Som kritik af intuitionismen kan yderligere nævnes, at den er solipcid. I Wittgensteins Bille-eksempel fremhæves, hvordan det i en sådan situation kan være yderst svært at have en saglig debat. Intuitionismen lider derunder, da det jo er individuelt, hvad den enkelte matematiker mener, at han eller hun kan konstruere mentalt.

7 Formalisme

Matematikkens udvikling i det 19. århundrede skabte et nyt fokus på erkendelsesteoretiske spørgsmål inden for matematikken. Dette gav som bekendt anledning til dannelsen af en række nye filosofiske skoler, der blandt andets skulle forsøge at besvare spørgsmål som ”Hvad handler matematik om?”og ”Hvilken mening kan vi tillægge matematiske objekter?”. Vi har allerede set hvordan logicisterne forsøgte at finde svarene i den formelle logik, mens intuitionisterne satte deres lid til menneskets rationalitet og intuition. Ingen af de to skoler formåede dog at besvare spørgsmålene i en grad, der kunne overbevise hele det matematiske samfund. Især problemet med betydningen og eksistensen af de matematiske objekter voldte store problemer, og måske var det netop det der motiverede det formalistiske synspunkt. Ifølge formalismen har matematiske objekter ingen mening eller eksistens. Matematik er ikke andet end manipulation med ord og symboler efter nogle givne regler, og enhver mening vi tillægger det må nødvendigvis ligge udenfor matematikken selv. Vi vil i det følgende se på nogle forskellige versioner af formalismen og beskrive formalismens forsøg på at sikre matematikkens grundlag. Herefter vil vi se på hvor formalismen fejlede og diskutere dens filosofiske synspunkter.

Det overordnede formalistiske synspunkt er gennem tiden blevet præsenteret i lidt forskellige udgaver[28]. Forskellene disse imellem er på én måde subtil, men på den anden side afgørende for synspunktets filosofiske gennemslagskraft. Begrebsformalisme (eng. term formalism) dækker over den filosofi, at matematikken er intet andet end lingvistiske manipulationer af ord og symboler. Synspunktet er semantisk realistisk da det tillægger matematiske udsagn en sandhedsværdi der i princippet kan afgøres ved en lingvistisk analyse, og denne analyse repræsenterer da vores bevisproces. Synspunktet støder dog ind i nogle vanskeligheder da det er problematisk at lade alle matematiske objekter repræsentere af deres eget lingvistiske symbol. Allerede ved konstruktionen af de reelle tal opstår problemet, idet overtælleligheden af disse umuliggør en egentlig navngivning af hver enkelt tal. Man kan altså ikke uden videre give mening til alle matematiske objekter som lingvistiske symboler.

En anden filosofisk nuance er spilformalismen. Ifølge den skal matematikken forstås som et spil på samme niveau som skak, og når vi arbejder med matematik spiller vi dette spil efter de regler det er underlagt i form af vores aksiomer og slutningsprocesser. Dette synspunkt sniger sig udenom alle ontologiske problemstillinger ved at sige at matematikken overhovedet ikke har nogen objektiv mening, og at en hvilken

[28] Den følgende opdeling af formalismen er inspireret af Shapiro, s. 141ff.

som helst mening vi måtte tillægge den er irrelevant for spillets gang, altså den matematiske praksis. Matematiske udsagn er altså hverken sande eller falske. Det er først når vi går ind og fortolker aksiomerne, at de får en sandhedværdi. Den vigtigste forskel fra begrebsformalismen er at vi her ikke forsøger at tilskrive matematiske objekter en mening ved at oversætte dem til symboler, men udelukkende kigger på de regler der binder dem sammen. Et matematisk udsagn kan således her også underlægges en lingvistisk analyse, men analysen går ikke ned på objekt-niveau. Der er en tredje udgave af formalismen der minder en del om spilformalismen, men som tager fat på et problem, der blev påpeget af Frege, vedrørende fortolkningsaspektet. Spørgsmålet er hvordan vi kan sikre os at en fortolkning der gør aksiomerne sande også gør de sætninger, spillereglerne tillader os at konstruere, sande. Frege siger at dette kun er muligt såfremt vi stiller visse krav til spillereglerne, nemlig at de skal bevare sandhedsværdien under en given fortolkning. Frege var som bekendt logiker, og hans forslag var derfor naturligvis at spillereglerne skulle bygge på logiske slutninger. Et matematisk udsagn er således noget der følger logisk deduktivt fra aksiomerne. Denne gren af formalismen kaldes derfor deduktivisme, og det var i denne form den blev taget op af David Hilbert i slutningen af det 19. Århundrede og brugt i hans værk "Grundlagen der Geometrie".

Hilbert så i formalismen muligheden for at give matematikken det sikre grundlag som hverken logicisterne eller intuitionisterne havde formået at gøre i tilfredsstillende grad. Hans idé bestod i at reducere alle grene af matematikken til strengt formelle systemer der skulle formuleres således at disse selv kunne gøres til genstand for en matematisk analyse. Hvis man kunne bevise at disse systemer var stærke nok til at kunne frembringe al kendt matematik, samt at de var konsistente, altså fri for modstrid, så ville matematikkens grundlag ifølge Hilbert være sikret. Disse mål udgjorde det berømte Hilbert program. Et vigtigt aspekt ved Hilberts filosofi var at det hidtidige besværlige og diffuse sandhedsbegreb som logicisterne og intuitionisterne opererede med blev elimineret, idet Hilbert vendte situationen på hovedet. I stedet for at forsøge at sikre matematikkens konsistens ved at bygge den op på et grundlag af sande udsagn, valgte han simpelthen at definere matematisk sandhed som matematisk konsistens. Hvis de formelle systemer der udgjorde vores matematiske grundlag var konsistente, da ville den matematik vi kunne konstruerer fra dem være sand. Dette punkt var en meget omdiskuteret del af Hilberts program og både Frege og Brouwer var dybt uenige i Hilberts synspunkt. De mente at begrebet sandhed indebar mere end blot konsistens, og specielt Brouwers intuitionisme repræsenterede som bekendt en radikalt anderledes holdning. Dette rørte dog ikke ved Hilberts motivation for at definere begrebet som han gjorde, nemlig at det gjorde matematisk sandhed til et spørgsmål, der kunne gøres til genstand for en matematisk analyse.

Hilberts program var dog ikke helt så enkelt som det måske umiddelbart kunne virke, da den matematiske analyse af de formelle systemer indebar en komplikation. Problemet bestod i, at den matematik der skulle benyttes til at analysere de formelle systemer allerede måtte vides at være sand. Ellers ville analysen være værdiløs. Her måtte således et andet sandhedsbegreb på banen, ellers ville analysen blot køre i ring. Hilberts løsning var faktisk meget inspireret af intuitionismen. Han sagde, at analysen af de formelle systemer skulle foregå efter en særlig art finit matematik som var sand uden for enhver tvivl og som baserede sig på menneskelig intuition. I korte træk skulle alle matematiske udsagn inden for den finite matematik kunne tjekkes ved et endeligt antal operationer. For den finite matematik er sandhedsbegrebet altså det samme princip som Brouwer lagde til grund for sit matematiske sandhedsbegreb, men forskellen er naturligvis at Brouwer ikke mente vi kunne nå længere. Indførelsen af den finite matematik i Hilberts program var nødvendig, men ulempen var naturligvis at programmet blev sårbart overfor de samme filosofiske argumenter som intuitionismen[29].

Første del af Hilberts program, der bestod i at få formaliseret matematikken, blev gennemført med stor succes og resultaterne bliver stadig benyttet i dag inden for matematisk logik. Det var programmets anden og vigtigste del der voldte problemer og i 1931 publicerede logikeren Kurt Gödel en artikel der umuliggjorde programmets gennemførelse. Gödel havde bevist at et formelt system der var stærkt nok til at indeholde de naturlige tal aldrig kunne bevise sin egen konsistens, samt at et sådant system desuden altid ville indeholde udsagn, der hverken kunne bevises eller modbevises. Dette førte selvfølgelig til den nærmest øjeblikkelige opgivelse af Hilberts program. Ikke blot måtte man opgive princippet om at opnå sandhed gennem konsistens, men man måtte også opgive tanken om at få skabt et system, der var stærkt nok til at indeholde al matematik. Efter Gödels artikel opgav matematikerne i almindelighed forsøget på at give matematikken et grundlag, og det matematiske arbejde blev adskilt fra matematikfilosofien.

Som med de to foregående skoler lykkedes det altså ikke for formalismen at sikre matematikkens fundament. Det er en indiskutabel konsekvens af Gödels resultater, hvilket formentlig også var årsagen til at forsøget på at benytte formalismen som grundlag endte så brat. Der var simpelthen ikke noget at komme efter. De formalistiske synspunkter havde dog fortsat stor succes, hvilket formentlig skyldes deres værdi for matematikkens ontologi. Formalismen havde forsynet matematikeren med et våben de kunne rette mod filosofferne, nemlig at matematikken var meningsløs og som sådan udelukket fra filosofisk debat. Som vi senere vil komme ind på skal dette dog nok i højere grad ses som en forsvarsmekanisme fra det matematiske samfund, snarere end en god beskrivelse af matematisk praksis. Men ovenpå de dramatiske erkendelser som grundlagskrisen havde forårsaget, er detnok at betragte som en meget naturlig reaktion. Skal man være hård var formalismen faktisk den filosofi der opnåede det dårligste resultat i kampen om grundlaget. Hvor logicisterne kunne påstå at de i de mindste havde de fleste af aksiomerne på plads, og intuitionisterne stædigt kunne påstå, at de da havde givet matematikken et grundlag, var man som formalist nødt til at slå opgivende ud med armene efter Gödels artikel. De var blevet ramt af deres egne våben. De formelle systemer de selv havde udviklet havde vendt dem ryggen og var blevet bevist utilstrækkelige med deres egne metoder. Formalismens resultat taget i betragning kan det måske undre, at den fik størst succes efter grundlagskrisen, men dette kan nok i høj grad tillægges en social betydning, i forhold til at det var den filosofi, der bedst tillod matematikerne at fortsætte deres arbejde uforstyrret, og gjorde det muligt for matematikerne at skille sig af med filosofien.

8 Diskussion

Vi har i det foregående set, hvordan alle tre forsøg på at sikre matematikkens grundlag løber ind i alvorlige problemer. Dette bliver anledningen til den egentlige grundlagskrise, da vi må indse, at de problemer de tre skoler har, efterlader os uden et

[29]Ovenstående afsnit er inspireret af Shapiro s. 158ff samt Snapper.

sikkert fundament for matematikken og med visheden om, at det indtil nu ikke har lykkedes nogle at sikre dens grundlag.

Efter grundlagskrisen bliver det formalismen, der trods de åbenlyse problemer, vinder størst accept. Set i et Kuhn'sk perspektiv kan dette forklares ud fra det faktum, at der ganske enkelt ikke var et stærkt paradigme som alternativ. Den dag i dag er formalismen stadig meget udbredt, dog med nogle ændringer fra Hilberts oprindelige program. Gödels ufuldstændighedssætninger har fortalt os, at vi ikke kan bevise konsistens, men man kan godt bevise og undersøge konsistens relativt. Derfor vælger man de 9 aksiomer i ZFC, hvormed man undgår de mest kendte paradokser og problemer, og selvom man ikke kan bevise konsistensen, bliver nutidens formalistiske program at aksiomatisere og undersøge den relative konsistens.

Denne fokusering på formalismen kan ses som en stopklods for matematikkens filosofi, idet formalismen som synspunkt bliver en undskyldning for ikke at beskæftige sig med matematikkens filosofi[30]. Desuden lider nutidens formalisme af de samme problemer med fokus på de formelle systemer og tekniske detaljer, som Hilberts program i sin tid gjorde. Årsagen til at den formalistiske holdning til matematik har vundet så stort indpas blandt praktiserende matematikere, dens problemer til trods, er nok i bund og grund at mange matematikere helst er fri for at bekymre sig om filosofiske problemstillinger. Formalismen løser ganske vidst ikke problemet med matematikkens grundlag, men den giver en ontologi for matematikken, som på mange måder er bekvem. Stillet over for matematikfilosofiske dillemaer kan formalisten altid støde dem fra sig ved at hævde at matematiske objekter alligevel ikke kan tillægges nogen form for objektiv eksistens eller mening. At matematikken blot er meningsløs lingvistisk manipulation af symboler og som sådan løsrevet fra filosofiske problemer. Denne holdning, som er mange matematikeres ansigt udadtil, afspejler dog i meget ringe grad den gennemsnitlige matematikers arbejde med matematikken. Typisk er det jo snarere den platoniske tangegang der præger dette arbejde. Matematiske objekter opfattes som noget der kan tillægges en form for abstrakt eksistens, og vi kan forestille os dem og undersøge deres egenskaber.

Vi taler om, at vi gør opdagelser i matematik, og at vi beviser objekters eksistens. En terminologi der er med til at dokumentere at formalismen i højere grad er et skjold, der bruges til at afværge filosofiske problemstillinger med snarere end en beskrivelse af matematisk praksis. Denne duale holdning udgør egentlig ikke et direkte problem, idet formalismen dybest set tillader, at vi kan gøre os alle de subjektive forestillinger om matematikken vi skulle have lyst til, sålænge vi erkender at disse forestillinger er noget der kommer fra os selv og ikke er noget der er indbygget i matematikken. Alligevel kan det dog ikke betragtes som tilfredsstillende, at den filosofi vi bygger vores matematik på tilsyneladende står i intuitiv modsætning til matematisk praksis. Det er en indikation på at vores filosofi er mangelfuld, at den bygger på nogle forældede ideer om hvad matematik er. Matematikfilosofien har brug for noget nyt ovenpå grundlagskrisen[31].

I ovenstående har vi set, hvordan de tre forsøg på at sikre matematikkens grundlag alle fejlede. Derfor bringer dette naturligt spørgsmålet om, hvorvidt matematikken overhoved kan få og behøver et sådant grundlag på banen. Det er ikke lykkedes nogle matematikere at løse grundlagskrisen sidenhen, men mange har, som nævnt, stillet sig tilfreds med formalismen i mangel af bedre. Nogle mener fortsat, at det

[30]Hersh side 14.
[31]Ovenstående er inspireret af Hersh, s. 21f

er muligt at finde et sikkert grundlag for matematikken[32], men vi vil i det følgende argumentere for en alternativ vej ud af grundlagskrisen, som dog kræver, at man er villig til at revurdere sit syn på matematikken som videnskab. Som Hersh formulerer det:

> ”What is needed now is a new beginning, not a continuation of the various ”schools”of logicism, formalism or intuitionism”[33]

Det er tydeligt, at alle tre grundlagsskoler opretholder den dualisme mht. erkendelse, som Hume introducerede i sit værk ”An Enquiry Concerning Human Understanding”[34]. Hume hævdede, at der grundlæggende fandtes to former for erkendelse, nemlig ”matters of fact”(svarende til Kants syntetiske viden) og ”Relations og ideas”(svarende til Kants analytiske viden)[35]. Den første type er kendetegnet ved at være sandt eller falsk afhængig af virkeligheden, mens den sidste er fornufts- og begrebssandheder, og således afhænger dennes sandhedsværdi ikke af tid, sted med mere, men udelukkende af de betydninger vi lægger i begreberne. Som tidligere nævnt placerede Hume og mange efter ham inkl. de tre grundlagsskoler, matematikken i den analytiske kategori til forskel fra andre videnskaber. Denne skarpe opdeling adskiller matematikken fra de øvrige videnskaber som værende af særstatus. Dette motiveres af den følelse, at matematikken forekommer os at være nødvendig og a priori sand til forskel fra de empiriske videnskaber.

De tre grundlagsskolers forsøg på sikring af grundlaget hviler altså helt fundamentalt på en ganske speciel opfattelse af matematikkens status som videnskab. En mulighed, hvorpå man kan undgå disse problemer, som jagten på grundlaget medfører, er at opgive tanken om et sikkert grundlag, og oven i købet give afkald på vigtigheden og nødvendigheden af et sådant. Hvis man opgiver forestillingen om matematikken som værende en skarpt adskilt videnskab, og dermed ændrer sin holdning til, hvad matematikkens status og genstandsområde er, vil det ikke længere være nødvendigt med et grundlag, idet matematikken kan fungere på lige vilkår med de øvrige videnskaber”Many of the difficulties and stumbling blocks in the philosophy of mathematics are created by inherited philosophical prejudies which we are free to discard if we choose to do so”, Hersh side 11.

Humes og empirismens absolutte skel mellem det analytiske og de syntetiske, som er anledningen til, at matematiske sætninger betragtes som værende væsentligt forskellige fra sætninger i andre videnskaber, kan sagtens kritiseres[36]. En sætning, der hyppigt anvendes som eksempel på en sætning der er sand qua dens logik er:

(1) Ingen ugift mand er gift

Som antages at være ækvivalent med

(2) Ingen ungkarl er gift

På grund af ækvivalensen antages den sidste også at være en analytisk sandhed. Relationen mellem ”ugift mand”og ”ungkarl”er, at de er synonyme, men det er på

[32]”It is evident that such a foundation is not necessary for technical mathematical research, but there are still those among us who yearn for it. The author believes that the key to the foundations of mathematics lies hidden somewhere among the philosophical roots of logicism, intuitionism and formalism ”, Snapper side 193

[33]Hersh side 11.

[34]”All three foundationist school shared the same preassumption []. The common preassumption was that mathematics must be provided with an absolutely reliable foundation. The disagreement was on the strategy ”, Hersh side 17.

[35]Hume section IV.

[36]Et eksempel på en filosof, der kritiserer Humes skel er Quine.

ingen måde klart, hvordan denne relation etableres mellem forskellige ord. Man kan derfor hævde, at det kun er sætninger svarende til (1), der er analytiske, og at de analytiske sætninger således udelukkende er uinformative. Derfor kan matematiske sætninger ikke høre under kategorien analytiske.

Matematik bliver altså til en syntetisk videnskab idet den i høj grad benytter sig af førnævnte synonymitetsprincip, i forbindelse med brugen af begreber og definitioner. Pointen er at disse begreber ikke kan forstås a priori. For eksempel kan man ikke sidde og tænke sig til hvad en vektor er, men er nødt til at have et eller andet begreb om dette ord dækker over. Det matematiske begrebsapparat er altså noget der er skabt a posteori, og således kan man betragte matematikken som en syntetisk videnskab. At dette alene skulle umuliggøre matematikkens særstatus er dog nok et lidt firkantet synspunkt at anlægge. Et modargument til det foregående kunne være, at de matematiske begreber blot er forkortelser for sætninger, der kan formuleres på formen (1) ovenfor, og matematikken kan derfor altid omformuleres i en form, der kan erkendes a priori. Det er dog på ingen måde intuitivt klart, at en sådan reduktion helt ned til a priori begreber altid er mulig.

Der er imidlertid også andre argumenter der søger at eliminere matematikkens særstatus. Et er at matematikken, som vi forbinder med noget evigt sandt og ufejlbarligt, gentagne gange har vist sin fejlbarlighed i form af beviser som er blevet publiceret, for siden hen at være blevet fundet forkerte. Man kan således argumentere for at hele bevisprocessen bør opfattes som empirisk. Dette synspunkt tages op af Lakatos i sin bog ”Proofs and Refutations”som netop gennem en eksemplificerende dialog søger at dokumentere at matematikken dybest set indeholder mange empiriske aspekter, og at det er disse empiriske processer, der skaber matematikken. Et af Lakatos eksempler bygger på beviset for Eulers polyedersætning[37]. Her fremstiller Lakatos med al tydelighed, hvordan bevisprocessen ikke blot er en simpel logisk deduktion fra start til slut, men snarere en proces hvor nye begreber dannes og gamle begreber ændres, for at få sætningen og dens bevis til at hænge sammen. Der fremsættes en hypotese som så udsættes for kritiske modeksempler, hvilket giver anledning til en ny hypotese og denne proces fortsætter ifølge Lakatos uden noget endepunkt. Vi får altså her et billede af matematikken som en dynamisk videnskab, der på mange måder minder om det vi kender fra den øvrige naturvidenskab, blot er de eksperimenter vi foretager tankeeksperimenter snarere end virkelige fysiske eksperimenter.

Et sidste argument, der taler for at give matematikken delvis empirisk status er fremkomsten af computerbeviser. Uanset hvordan vi ser på det vil et computerbevis altid have en empirisk kerne idet vores viden om hvad computeren gør bygger på empiri. Hvis man vil kunne acceptere computerbeviser, som f.eks. beviset for firfarvesætningen, er man altså nødt til at acceptere en vis grad af empiri i matematik, og de fleste matematikere anerkender rent faktisk dette bevis. Computerbeviser er dog stadigt meget omdiskuterede, netop fordi de bryder med den matematiske tradition. Her vil vi blot konstaterer, at hvis matematikken gives et delvist empirisk grundlag vil brugen af computere ikke lede os ud i filosofisk uføre.

Hvis man accepterer nogle af ovenstående argumenter bliver matematikken ikke længere en kilde til nødvendig sand viden. Som Hersh skriver

> ”The actual experience of all schools - and the actual experience of mathematicians - shows that mathematical truth, like other kinds of truth, is

[37] Lakatos, kapitel 1

fallible and corrigible."

Måske er det i virkeligheden det, grundlagskrisen har lært os; en ting er at antage matematikkens særstatus som kilde til nødvendig og a priori viden, mens man leder efter grundlaget, men det er en ganske anden sag at forsætte med at hævde, at denne antagelse er korrekt, når grundlagskrisen med al tydelighed har vist os, at det ikke umiddelbart er muligt at nå dette mål[38].

Ophævelsen af matematikkens særstatus som videnskab løser et andet kendt filosofisk problem, nemlig gåden til matematikkens effektivitet inden for andre videnskaber. Hvis matematikken rent faktisk er at opfatte som en empirisk videnskab, der formes i samspil med virkeligheden er der ikke længere noget underligt i at matematikken skulle kunne beskrive disse. Dette samspil har talrige historiske eksempler, som Lützen blandt andet gennemgår i sin artikel "En videnskabelig duo: Matematikkens samspil med fysik 1809-1950"[39]. F.eks. blev distributionsteorien udviklet for at kunne udvide antallet af mulige løsninger til en række differentialligninger fra fysikken, og artiklen indeholder en lang række andre eksempler som vi ikke vil gennemgå. Dette samspil mellem matematik og fysik giver kun mening, hvis man reviderer sin opfattelse af matematikkens filosofiske grundlag: For hvorfor skulle fysikken som er en empirisk videnskab give anledning til ny matematik, hvis matematikken var at opfatte som en ren a priori videnskab? Det er derfor en oplagt tolkning, at matematikken tilskrives en vis form for idealisering, der ikke opretholdes i den virkeligt foregående matematik. Dette skyldes som nævnt den måde matematikken fremstilles på, idet man let får den opfattelse, at matematikken med dens rationelle og deduktive metoder adskiller sig radikalt fra de øvrige videnskaber, idet den ingen relation har til den virkelige verden.

Vi er efterhånden nået frem til at matematikken ikke kan opfattes som isoleret fra andre videnskaber, men hvor langt kan vi gå i at fundere vores matematiske grundlag i virkeligheden? Et ekstremt synspunkt kunne være at sige at matematiske sætninger, der beskriver et virkeligt eksisterende fænomen er sande netop på grund af dette. At vi ikke behøver andet end virkeligheden til at bevise vores matematiske resultater. Hvorfor har en første ordens differentialligning en løsning? Fordi vi kan observere løsningen i virkeligheden. Dette synspunkt er næppe ønsket af mange matematikere, og vi nævner det blot for at fremhæve, at der stadig er grænser for, hvor langt man kan og bør gå i at rodfæste matematikkens grundlag i andre videnskaber. Det førnævnte ekstreme synspunkt er netop mange teoretiske fysikeres bevidste eller ubevidste tilgang til matematikken, og denne tankegang bør ikke legitimeres inden for almen matematisk metode. Det er vigtigt, at vi finder en passende filosofi der bevarer vores fornemmelse for hvad matematik er, og for hvordan matematisk praksis foregår. Et godt grundlag for matematikken bør netop opfylde disse betingelser[40].

Opgøret med Humes skel mellem analytiske og syntetiske sætninger, der medfører, at matematiske sætninger kan betragtes som syntetiske, samt det faktum, at matematikken modtager input udefra den virkelige verden, gør, at vi meningsfuldt kan opfatte matematikken som en videnskab på samme præmisser som øvrige videnskaber. Det betyder, at matematisk og videnskabelig erkendelse principielt set er af samme karakter. En vej ud af grundlagskrisen kunne altså være, at opgive matematikkens status som en videnskab med nødvendig og sikker viden[41]. Dermed kan

[38]Hersh side 10ff

[39]Lützen

[40]Dette synspunkt er netop det der fremsættes i Hersh

[41]"We do not have absolute certainty in mathematics; we may have virtual certainty, just as in

vi opgive den (forgæves) jagt på et sikkert grundlag for matematikken og i stedet betragte matematik som en del af menneskelig erkendelse i almindelighed.

9 Konklusion

Vi har i denne opgave redegjort for, hvad der gik forud for matematikkens grundlagskrise, og hvad der dermed menes. Vi har gennemgået tre forsøg på at sikre matematikkens grundlag og løse de problemer, der førte til krisen, men vi har også belyst, hvordan de alle fejlede, og hvad der hver især hindrede dem i at sikre matematikkens grundlag. Efterfølgende har vi diskuteret, hvorvidt det er meningsfuldt at hævde, at matematikken må have et grundlag, sådan som de fleste matematikeres umiddelbare intuition fortæller dem er muligt.

Konklusionen ovenpå grundlagskrisen er nok at et sådant grundlag ikke kan ligge inden for matematikken selv. Da matematikken ikke kan ses uafhængigt af andre videnskaber, vil en udvikling inden for andre videnskaber også påvirke matematikken. Det giver derfor ikke mening at betragte matematikken uafhængigt og isoleret. At matematikkens udsagn indgår i de fleste andre videnskaber og udgør en hård kerne i systemet af viden, får os fejlagtigt til at tro, at de matematiske sætninger er objektivt nødvendige. Men denne opfattelse er måske i virkeligheden en illusion. Vores konklusion er, meget i overensstemmelse med Hersh, at matematikken må tillæges et mere empirisk grundlag, der afspejler den matematiske praksis. Således kommer vi ud over dogmet om, at matematikken har en særstatus i forhold til andre videnskaber, og vi kommer ud over problemerne fra grundlagskrisen. Desuden vil et sådant grundlag også give en løsning på andre filosofiske problemer som f.eks. matematikkens effektivitet i naturbeskrivelsen.

other areas of life", Hersh side 20

Litteratur

[1] ”L.E.J. Brouwer: ”On the significance of the principle of the excluded middle in mathematics, es-pecially in function theory”(uddrag). Forkortet: Brouwer

[2] ”Philip Davis Reuben Hirsh: ”Pi and Pi-Hat”. Forkortet: Davis

[3] ”Reuben Hersh: ”Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics”. Fokortet: Hersh

[4] ”Hume: ”Enquiry Concerning Human Understanding”ed. by T. Beauchamp, Oxford 1999. Forkor-tet: Hume

[5] ”Immanuel Kant: ”Prolegomena to any future metaphysics”trans. by J.W. Ellington, Hackett

[6] ”Jesper Lützen: ”En videnskabelig duo: Matematikkens samspil med fysik 1809-1950”. Forkortet: Lützen.

[7] ”Steward Shapiro:”Thinking About Mathematics”, Oxford: Oxford University Press, 2000. Forkor-tet: Shapiro

[8] ”Ole Skovsmose: ”Ud over matematikken”(uddrag). Forkortet: Skovsmose

[9] ”Ernst Snapper: ”Three Crisis in Mathematics: Logicism, Intuitionism, and Formalism”. Forkortet: Snapper

[10] ”Imre Lakatos: ”Proofs and Refutations”, Cambridge University Press, 1976. Forkortet: Lakatos