

# Cavendish' forsøg og gravitation

Af Jérôme Baltzersen

## Indholdsfortegnelse:

Historisk indledning.....	2
Videnskabelig indledning.....	3
Beskrivelse af cirkulær bevægelse.....	3
Masse og kraft for roterende legemer.....	4
Inertimoment for en kugle.....	6
Steiners sætning.....	8
Impulsmoment.....	9
Cavendish' eksperiment.....	9
Udførsel.....	10
Teori.....	11
Måledata og databehandling.....	14
Måling af tyngdeaccelerationen på Jorden.....	15
Det frie fald.....	15
Timerstrimmel.....	15
Udførsel.....	16
Teori.....	16
Måledata og databehandling.....	16
Diskussion og konklusion.....	17
Fotokamera, udførsel.....	17
Teori.....	17
Måledata og databehandling.....	17
Det matematiske pendul.....	18
Udførsel.....	18
Teori.....	18
Måledata og databehandling.....	19
Diskussion og konklusion.....	19
Konklusion på eksperimenter til bestemmelse af tyngdeacceleration.....	19
Overordnet konklusion.....	20
Bilagsfortegnelse.....	21
Kildefortegnelse.....	29

## Cavendish' forsøg og gravitation.

**Historisk indledning:** Sir Isaac Newton (1642-1727) havde i sit mesterværk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* beskrevet alle bevægelser omkring os inklusive bevægelser som følge af gravitationen. Hans forgængere var Nicolas Kopernikus (1473-1543) og danskeren Tycho Brahe (1546-1601), der igennem sine revolutionerende<sup>1</sup> målinger af Mars' bane, med et slag grundlagde den moderne videnskab med matematikken som sprog, samt gav Johannes Kepler (1571-1630, Brahes elev) mulighed for at opstille sine berømte love. Galileo Galilei (1564-1642) fandt vha. denne nytænkning, at alle legemer falder lige hurtigt, samt at den tilbagelagte strækning er proportional med kvadratet på tiden.

Newton kender vi bedst fra hans tre love, men de fleste ikke-fysikere ville instinktivt forbinde ham med ”opdagelse” af gravitationen. Newton indså, at de naturlove og kræfter, der virker mellem himmellegemerne og her på Jorden er de samme. Han formulerede således også gravitations loven som fastslår, at kraften forårsaget af gravitationen mellem to legemer er proportional med kvadratet på afstanden. Newton selv interesserede sig aldrig for hvilken konstant, gravitationskonstanten, der udgjorde proportionaliteten. Da man kendte Jordens radius, er dette problem ækvivalent med at bestemme Jordens masse. Newton gættede på, at Jorden havde en densitet fem til seks gange så stor som vands<sup>2</sup>, hvilket skulle vise sig at være korrekt.

Lord Henry Cavendish (1731-1810) udførte sit berømte forsøg i 1798, hvor det lykkedes ham at bestemme gravitationskonstanten så præcist, at vi i moderne tid blot har måtte korrigere den med mindre end 1 %. Man kan udmærket anvende Newtons gravitationslov uden kendskab til gravitationskonstanten, men vores viden om alle himmellegemers masse afhænger af gravitationskonstanten, da man ved at betragte et himmellegemes omkredsende satellit kan bestemme produktet af gravitationskonstanten

---

<sup>1</sup> Ordet ”revolution” betyder oprindeligt at vende tilbage til tidligere tilstande, dog efter udgivelsen af Kopernikus' bog *De Revolutionibus Orbium Coelestium* i 1543 blev ordet anvendt i dets nutidige betydning, da denne bog opgav tanken om et geocentrisk verdensbillede.

<sup>2</sup> ”It is probable that the quantity of the whole matter of the Earth may be five or six times greater than if it consisted of water”, Newton i *Principia*.

og himmellegemets masse. Cavendish' eksperiment er nu en standardøvelse i mekanik på universitetet.

**Videnskabelig indledning:** Ligningerne er nummeret som (n.m), hvor n refererer til afsnittet, mens m er nummeret af ligningen i afsnittet. Dette er gjort for at lette navigation i teksten. De forskellige ligninger er taget fra forskellige lærebøger. De tre lærebøger, der hovedsageligt er anvendt, er *Orbit 3*, *Elements of Newtonian Mechanics* og *Mekanik*<sup>1</sup>. Jeg har valgt ikke at henvise til, hvilken bog jeg har taget ligninger fra, da alt det stof, der indgår i denne opgave findes i utallige lærebøger, vil det næppe være rimeligt at opgive netop en.

Jeg ønsker at takke lektor Mogens Levinsen fra Niels Bohr Institutet for have vejledt mig under udførelsen af Cavendish' eksperiment i forbindelse med denne opgave.

**Beskrivelse af cirkulær bevægelse:** For at forstå Cavendish' eksperiment må man udvide sin fra gymnasiet velkendte newtonske mekanik til også at omfatte roterende legemer. Ligesom vi har en række betegnelser for størrelser i translatoriske – bevægelse ad lige linier – sammenhæng, kan vi indføre sådanne for roterende legemer omkring en fikseret akse. At akse er fikseret medfører, at vi kun kan regne på cirkulære bevægelser, men fx ikke elliptiske, da en ellipse har to brændpunkter, svarende til akser, frem for et centrum svarende til én akse.

Den mest elementære størrelse vi kender fra mekanikken er positionen, normalt kaldt  $x$ . For roterende bevægelser kan vi entydigt bestemme positionen af en partikel ud fra en vinkelpositionen  $\theta$ . Denne angives traditionelt i intervallet  $[0^\circ; 360^\circ]$ . Om  $\theta$  gælder da, hvor vinkelhastigheden er betegnet  $\omega$  :

$$\theta(t) = \omega t \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

Lad  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}$  betegne en vektor **OP**, hvor P er det punkt på cirklen, hvor vores partikel befinder sig til tiden  $t$ . I et koordinatsystem udspændt af  $\mathbf{j}$  og  $\mathbf{i}$ , kan  $\mathbf{r}(t)$  skrives som:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = r \cos(\omega t)\mathbf{i} + r \sin(\omega t)\mathbf{j}, \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0, \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = 1$$

---

<sup>1</sup> For nærmere information se kildefortegnelse.

Næste begreb der indføres er hastighed velkendt defineret som  $\dot{\mathbf{r}}$ . Ligeledes kan vi differentiere  $\mathbf{r}(t)$  fra (1.1):

$$\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}/dt = -r\omega \sin(\omega t)\mathbf{i} + r\omega \cos(\omega t)\mathbf{j} \Rightarrow |\mathbf{v}(t)| = \omega |\mathbf{r}(t)| = \omega r$$

$\ddot{\mathbf{r}}$  betegner accelerationen, og for roterende legemer findes:

$$\mathbf{a}(t) = d^2\mathbf{r}/dt^2 = -r\omega^2 \cos(\omega t)\mathbf{i} - r\omega^2 \sin(\omega t)\mathbf{j} = -\omega^2\mathbf{r}(t)$$

Enheden for  $\omega$  findes:

$$[\omega] = \frac{[\mathbf{a}(t)]}{[\mathbf{v}(t)]} = \frac{[\mathbf{v}(t)]}{[\mathbf{r}(t)]} = \frac{\text{ms}^{-1}}{\text{m}} = \text{s}^{-1}$$

**Masse og kraft for roterende legemer:** Først er det vigtigt at slå fast, at masse måles i kilogram, og er ens for et givet legeme, hvad enten det befinder sig ved Jordens overflade, i det tomme rum eller på et hvilket som helst andet sted. Vægt,  $w$ , er derimod afhængigt af tyngdefeltet der påvirker et legeme. Er der ikke noget tyngdefelt vil et legeme være *vægtløs*, mens det i et vilkårligt tyngdefelt vil have en vægt svarende til dets masse ganget med tyngdefeltets størrelse kaldet tyngdeaccelerationen:

$$\mathbf{w} = m \cdot \mathbf{a}_{\text{tyngde}}, \quad [\mathbf{w}] = \text{kgms}^{-2} = \text{N}$$

Vægten er altså et specialtilfælde af Newtons anden lov, hvor man kun betragter den kraft, der virker som følge af tyngdefeltet. Newtons anden lov:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Leftrightarrow m = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{a}}$$

Vi kan også skrive Newtons anden lov som følger<sup>1</sup>:

$$F = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Vi ser, at *impuls* er defineret i Newtons anden lov.

Udstrakte legemer kan i mange tilfælde erstattes af en partikel med samme masse som hele legemet. Dette gælder, hvis vi har med et legeme at gøre, der er så stift, at det ikke ændre udstrækning, form, under rotation. Et sådan legeme kaldes et *stift legeme*. Vi har ubevidst anvendt dette princip, hver gang vi har ønsket at beregne gravitationen mellem to legemer. Har vi fx ønsket at beregne den kraft Solen påvirker Jorden med, har vi samlet *hele* Solens og *hele* Jordens masse i ét punkt, nemlig deres centrer, og da brugt

<sup>1</sup> Dette var den form Newton selv oprindeligt opstillede sin anden lov.

afstanden mellem disse centrer i vores gravitationsformel. Vi har altså antaget at deres massemidtpunkt var i deres centrum. Vi definerer stedvektoren til et udstrakt legemes massemidtpunkt,  $\mathbf{R}_{MC}$ , som følgende:

$$\mathbf{R}_{MC} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

Her har vi delt legemet op i  $N$  dele, og da fundet *det vægtede gennemsnit*, hvormed hver vektor skal indgå ved at sammenligne massen for den  $N$ 'te del,  $m_i$  med hele legemets masse,  $M$ . Dette gøres for de dimensioner man ønsker at have med. Denne metode er smart, sålænge vi har med simple legemer at gøre.

Vi betragter som eksempel to punktmasser  $m_1$  og  $m_2$  med hhv. massen 0,010 kg og 0,030 kg placeret i hver deres ende af en 0,10 m lang, masseløs stang. Vi ønsker at finde massemidtpunktet.

Da vi har placeret en stang mellem de to punktmasser har vi med et stift legeme at gøre, og kan da anvende (2.4). Vi placerer  $m_1$  i  $x = 0$  m, og regner kun i en dimension:

$$\mathbf{R}_{MC} = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i \mathbf{r}_i}{M} = \frac{0,010 \text{ kg} \cdot 0 \text{ m} + 0,030 \text{ kg} \cdot 0,10 \text{ m}}{0,010 \text{ kg} + 0,030 \text{ kg}} = 0,075 \text{ m}$$

Vi har altså fundet, at deres massemidtpunkt ligger 0,075 m inde på stangen set fra  $m_1$ . Da vi har med vektorer at gøre, ved vi fra matematikken, at en vektor ikke har et punkt, hvor den starter, og et punkt, hvor den ophører, så vi kan konkludere, at ligning (2.4) gælder, uafhængigt af valg af koordinatsystem.

Vi kan definere en størrelse, der svarer til kraft for roterende legemer kaldet *kraftmoment*. Det synes logisk, at kraftmomentet skal være en størrelse, der tager hensyn til følgende:

1. Kraftens (ikke kraftmomentets!) størrelse:  $F$
2. Afstanden fra massemidtpunktet til det punkt, hvor kraften virker:  $r$
3. Vinklen mellem  $F$  og  $r$ :  $\varphi$

Desuden ønsker vi, at hvis  $\varphi$  er  $0^\circ$  eller  $180^\circ$  så skal kraftmomentet være 0, da det så ikke kan øge vores inertimoment. Analogt må kraftmomentet skulle være størst ved  $90^\circ$  eller  $270^\circ$ . Under hensyn til alt dette, definerer vi kraftmomentet,  $H$ , som:

$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = rF \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_n$$

Hvor  $\mathbf{e}_n$  er en enhedsvektor i  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ 's retning. Retningen af  $\mathbf{e}_n$  og  $\mathbf{H}$  kan findes ved brug af en højrehåndsregel. Højrehåndsregelen gælder for alle krydsprodukter, man skal dog selvfølgelig erstatte vektorerne, med dem man nu regner på.

*Retningen af kraftmomentet findes ved, at du placerer din højre hånd således, at fingrene er i  $\mathbf{r}$ 's retning, og håndfladen i  $\mathbf{F}$ 's retning. Kraftmomentet vil da have samme retning som din tommelfinger, og være vinkelret på både  $\mathbf{r}$  og  $\mathbf{F}$ .*

Vi ser da, at alle vores opstillede betingelser er opfyldt.

Det ses af (2.2), at masse i translatoriske bevægelser er den modstand et legeme yder mod at blive accelereret af en given kraft. Man kan definere en tilsvarende egenskab for roterende legemer. Altså en egenskab som afgør, hvor stort et kraftmoment vi skal bruge for at accelerere legemet i dets rotation. Vi kalder vores søgte størrelse for inertimoment,  $I$ . Vi betragter et legeme, der udfører en jævn cirkelbevægelse:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

Vi ønsker, at vores definition af kinetiske energi for roterende bevægelser, skal minde mest muligt om vores definition af kinetiske energi for translatoriske bevægelser. Af (2.6) ser vi, at den kinetiske energi for cirkulære bevægelser afhænger af massen, radius og vinkelhastigheden.

Vi definerer inertimomentet  $I$  som:

$$I = \rho \int_0^V R^2 dV$$

Hvor  $\rho$  er massefylden og  $V$  volumenet. Inertimomentet kan også skrives som en skalær summation over alle massedele:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Hvis vi ser på (2.6) og (2.8) kan vi se, at man vi kan omskrive (2.6) til:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

**Inertimoment for en kugle:** Vi får senere brug for at udregne inertimomentet for en kugle, hvorfor vi vil finde det her. Til dette er det nyttigt først at betragte en cirkulær skive med radius  $R$ . Vi deler skiven op i ringe med tykkelsen  $dr$ . Da ringen er uendelig tynd vil alle de enkelte punktmasser i en ring have samme afstand  $r$  til centrum. Vi kan

derfor erstatte integralet fra (2.7) med et integral i en dimension, da massen inddrager højden for en skiven. Lad hele skiven have massen  $M$ , da må en ring have massen  $m$ , der er givet ved:

$$m = \frac{M}{A_{\text{skive}}} \cdot O_{\text{ring}} dr = \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi r dr$$

Da alle punktmasser i en ring har samme afstand fra centrum, og med den udvidede definitionen fra (2.8), kan vores inertimoment skrives som:

$$I = \int_0^R r^2 m = \int_0^R r^2 \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi r dr = 2 \frac{M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{R^2} [r^4]_0^R = \frac{M}{2R^2} \cdot R^4 = \frac{1}{2} MR^2$$

Vi fortsætter nu for at finde en kugles inertimoment. Koordinatsystemets nulpunkt lægges i kuglens centrum, og kuglens skæres i skiver, hver med tykkelsen  $dx$ . Snittene til disse skiver lægges vinkelret på x-aksen. Kuglens radius er  $R$ . Fra ligning (2.8) ved vi, at vi har brug for radius  $r$ . Vi har brug for at finde radius for en skive i afstanden  $x$  fra centrum: vi kan tegne en retvinklet trekant med en side fra centrum til  $x$  – den har længden  $x$  –, fra  $x$  og vinkelret op – den har længden  $r$  –, og fra centrum til vinkelret over  $x$  – den har længden  $R$ . Vha. pythagoras' læresætning finder vi da, at:

$$r = \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow r^2 = R^2 - x^2$$

Vi har kun brug for  $r^2$  i resten af udregningerne, hvorfor vi har fundet den med det samme.

$\rho$  betegner massefylden, og vi skal da gange  $\rho$  med  $V$  for at finde massen.

$$dM = \rho V = \rho \pi (R^2 - x^2) dx$$

Den sidste omskrivning er gyldig, da vores skive pga. sin infinitesimale størrelse er en cylinder, og da volumenet for en cylinder er defineret som:

$$V_{\text{cylinder}} = \pi r^2 h$$

Ovenfor fandt vi  $r^2$ , og  $h$  er  $dx$ .

Vi finder inertimomentet for kuglen, som inertimomentet af alle de uendeligt mange skiver lagt sammen. At man må gøre dette, svarer til at en masse har den samlede masse af alle massedele den består af. Matematisk set fremgår det direkte af (2.8). Vi får derfor brug for vores resultat fra (2.11) om skivens inertimoment. Desuden får vi brug for:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Bidraget af en skive med masse  $M$  og radius  $P$  er da:

$$\frac{1}{2}MP^2 = \frac{1}{2}dM(R^2 - x^2) = \frac{1}{2}\rho\pi(R^2 - x^2)dx(R^2 - x^2) = \frac{1}{2}\rho\pi(R^2 - x^2)^2 dx$$

Vi skal da integrere over hele kuglen – dvs. fra  $x = -R$  til  $x = R$  for at finde inertimomentet:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-R}^R \frac{1}{2}\rho\pi(R^2 - x^2)^2 dx = \frac{1}{2}\rho\pi \int_{-R}^R R^4 + x^4 - 2R^2x^2 dx = \\ &= \frac{1}{2}\rho\pi \left( R^4 \int_{-R}^R dx + \int_{-R}^R x^4 dx - 2R^2 \int_{-R}^R x^2 dx \right) = \frac{1}{2}\rho\pi \left[ R^4x + \frac{x^5}{5} - \frac{2R^2x^3}{3} \right]_{-R}^R = \\ &= \frac{1}{2}\rho\pi \left( 2R^5 + \frac{2R^5}{5} - \left( \frac{2R^5}{3} - \frac{-2R^5}{3} \right) \right) = \frac{1}{2}\rho\pi \left( 2R^5 + \frac{2R^5}{5} - \frac{4R^5}{3} \right) = \\ &= \rho\pi R^5 \left( 1 + \frac{1}{5} - \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{15}\rho\pi R^5 \end{aligned}$$

I (2.17) indsættes (2.15), og inertimomentet for en kugle findes til:

$$I_{\text{kugle}} = \frac{8}{15}\rho\pi R^5 = \frac{8}{15} \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \pi R^5 = \frac{8 \cdot 3}{15 \cdot 4} MR^2 = \frac{24}{60} MR^2 = \frac{2}{5} MR^2$$

**Steiners Sætning:** Vi ønsker at kunne beregne inertimomentet for et legeme, der roterer om en akse parallel med den akse, som går gennem massemidtpunktet kaldet  $z_{\text{center}}$ . Dette legeme må have et inertimoment  $I_z$ , og derfor:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}I_z\omega^2$$

Vi fortsætter vores betragtninger som følger: Man kan betragte legemets bevægelse omkring  $z_{\text{ny}}$ , som en sum af massemidtpunktets translatoriske bevægelse, og rotationen af legemet omkring massemidtpunktet gennem akse  $z_{\text{center}}$ . Lad  $a$  betegne afstanden fra  $z_{\text{center}}$  til  $z_{\text{ny}}$ , da er massemidtpunktets fart omkring  $z_{\text{ny}}$  kaldet  $v_{\text{mm}} = a\omega$ . Dette legeme må ligeledes rotere med vinkelhastigheden  $\omega$ , da de enkelte dele af legemet – bortset fra massemidtpunktet – ellers ville rotere yderligere, og der ville derfor være et forøget inertimoment. Man kan sammenligne med Jordens rotation omkring solen. Den tid det tager for Jorden at fuldføre en omdrejning om sig selv, og om Solen skal være den



samme, ellers vil man skulle medregne Jordens inertimoment om sin egen akse. Da vi ønsker at have en situation svarende til, at Jorden *altid* vender samme "side" til Solen, er vores forudsætning om ens vinkelhastighed korrekt. Man kan derfor skrive den kinetiske som følger:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv_{\text{mm}}^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}ma^2\omega^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(ma^2 + I_0)\omega^2$$

Men da vi har betragtet samme legeme må (2.19) og (2.20) være lige store:

$$\frac{1}{2}I_z\omega^2 = \frac{1}{2}(ml^2 + I_0)\omega^2 \Leftrightarrow I_z = ma^2 + I_0$$

Dette resultat kaldes *Steiners Sætning* eller *parallel-akse-teoremet*.

**Impulsmoment:** Fra translatorisk bevægelse kender vi impuls. Vi kan tilsvarende definere *impulsmoment*,  $L$ .

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = r \cdot m \cdot v \sin \phi$$

Hvor  $\phi$  er vinklen mellem  $\mathbf{r}$  og  $\mathbf{p}$ . Vi kan finde retningen vha. højrehåndsreglen nævnt i forbindelse med kraftmoment. Det viser sig, at man kan skrive  $L$  som en sum:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n m_i r_i v_i = \sum_{i=1}^n m_i r_i \omega r_i = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \omega \cdot I$$

Her har vi i sidste skridt brugt (2.8).

Vi vil nu differentiere impulsmomentet:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{H}$$

Vi har til sidst benyttet (2.22), og at en vektor krydset med en vektor i samme retning, og navnlig sig selv er 0.

**Cavendish' eksperiment:** I dette eksperiment ønsker vi at bestemme gravitationskonstanten,  $G$ , der indgår i Newton gravitationslov:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Vi kan måle tyngdeaccelerationen,  $g$ , på Jorden, men dette giver os hverken  $G$ , den ene af masserne eller afstanden mellem masserne. Dette fremgår ved at sætte den resulterende kraft lig den gravitationelle. Vi antager, at vi kender  $m_2$ :

$$F_{\text{tyngde}} = F_{\text{inertiel}} \Leftrightarrow G \frac{m_1 m_2}{r^2} = g m_2 \Leftrightarrow g = G \frac{m_1}{r^2}$$

At bestemme gravitationskonstanten vil ikke kun give os viden om Jordens masse, men også om *alle* andre himmellegemers masse<sup>1</sup>, ja sågar hele galakser og galaksehober. At bestemme gravitationskonstanten er derfor af stor astronomisk interesse.

Udfordringen i den eksperimentelle opstilling er, at vi skal bestemme en kraft i størrelsesordenen  $10^{-9}$  N. Dette gøres ved hjælp af en tynd fiber, som opfører sig på samme måde som en ideel fjeder. Fiberen udfører en harmonisk oscillation.

Apparatur:

- Laser (30 mW)
- Cavendish apparatur. Fiberen hænger i et lukket rør, og ender i en tynd stang, hvor der i hver ende er fastsat en lille kugle. På fiberen er der fastsat et spejl, som roterer med fiberen.
- Vejebord (granit), og andre materialer til stabilisering af opstilling (mursten af bly o.l.).
- To større kugler
- Stopur

**Udførsel:** Cavendish apparaturet opstilles på et vejebord, og stabiliseres, da selv meget små vibrationer kan have stor indflydelse på fiberen. Der placeres en laser skråt over for Cavendish apparaturet, som lyser på spejlet, og projicerer sin lysplet på en mobil væg indsættes. Man sikrer sig, at fiberen kan bevæge sig uhindret i alle retninger, da der ikke må forekomme unødigt dæmpning. Derefter placeres de store kugler i den ene yderposition kaldet I. Efter at fiberen er stoppet med at rotere, sættes de store kugler over i den anden yderposition kaldet II. Da laserpletten er ret stor, ca. 5 cm i diameter, er nøjagtig aflæsning svær. For at mindske denne unøjagtighed vælges at måle ved højre kant af pletten, da kanten er mere veldefineret end midten<sup>2</sup>. Efter at de store kugler er blevet flyttet fra position I til II oscillerede fiberen. Det viste sig, at der er en ret kraftig dæmpning på fiberen, hvorfor den efter kort tid – omtrent 10 minutter – stod stille, og det var derfor simpelt at finde den vinkel som fiberen var drejet som følge af de store kuglers bevægelse.

---

<sup>1</sup> Med undtagelse af dem, som ingen satellitter – hverken naturlige eller kunstige – har.

<sup>2</sup> Om end midten er defineret ved kanterne, så er det svært at finde midten i praksis på under et sekund.

For at finde svingningstiden sættes fiberen i større bevægelse ved et lille puf, og der tegnes en horisontal linie gennem et punkt forskelligt fra de to yderpunkter. Svingningstiden måles da ved at vente på, at fiberen udfører en hel oscillation set i forhold til denne linie, og da aflæses tiden på stopuret.

Efter at eksperimentet er tilendebragt måles alle afstandene med enten målebånd eller skydelære. Desuden vejes begge de store kugler. Man vejede også de små kugler, idet radius måles, og ud fra oplysningen om, at disse kugler er lavet af bly kunne man finde deres vægt.

**Teori:** For at bestemme kraften, der virker på fiberen, må vi bestemme, hvor stort et udslag fiberen tillader. Dette kan tolkes som den vinkel spejlet roterer og denne vinkel kaldes  $\alpha$ . Den dobbelte vinkel måles vha. af vores laser, og kan beregnes ud fra vor opstillings dimensioner. Lad  $L$  være afstanden fra spejlet til den flade, hvorpå vi følger laserens bevægelse, og  $S$  være laserens bevægelse fra den ene yderposition til den anden. For tangens til små vinkler regnet i radianer, gælder der, at  $\tan x = x$ . Da gælder der:

$$\frac{S/2}{L} = \frac{S}{2L} = \tan \alpha \approx \alpha; \quad \frac{s}{2d} = \tan \alpha/2 \approx \alpha/2$$

$$\frac{S}{2L} = \frac{s}{d}$$

Det kraftmoment fiberen udøver er proportionalt med vinklen, og der gælder:

$$\mathbf{H}_{\text{fiber}} = -\kappa\theta$$

Et sådan pendul kaldes *torsionspendul*, og  $\kappa$  kaldes for trådens torsionskoefficient. Ved at omskrive (3.4) vha. (1.1), (2.23) og (2.24) får vi:

$$\mathbf{H} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{dI\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta$$

Dette er en andenordens differentiaalligning, og fra vores viden om harmoniske oscillatorer finder vi, at der for svingningstiden  $T$  gælder:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{k} \Leftrightarrow k = \frac{4\pi^2 I}{T^2}$$

Vi ønsker at finde inertimomentet af de to sfære. Vi benytter Steiners sætning (2.21), og inertimomentet for en sfære (2.18):

$$I = I_0 + ma^2 = \frac{2}{5}mr^2 + ma^2$$

Vi ser, at hvis  $a$  er meget større end  $r$ , da vil vi kunne negligere det første led af den fundne værdi for inertimomentet.

Kraftmomentet der udøves på stangen af gravitationen kalder vi  $\mathbf{H}$ , og der må da gælde:

$$|\mathbf{H}_{\text{gravitation}}| = 2|\mathbf{d} \times \mathbf{F}| = 2dF \sin 90^\circ = 2dF = 2dG \frac{m_1 m_2}{b^2}$$

$b$  findes som følger, da  $b$  betegner afstanden mellem den store og den lille kugles centrum:

$$b = r_{\text{stor}} + \frac{c_{\text{glas}}}{2} - \frac{s}{2} = r_{\text{stor}} + \frac{c_{\text{glas}}}{2} - d\alpha/2 = r_{\text{stor}} + \frac{1}{2} \left( c_{\text{glas}} - \frac{Sd}{2L} \right)$$

Da den resulterende kraft er 0, må der gælde, at  $\mathbf{H}_{\text{gravitation}}$  er lige så stor som  $\mathbf{H}_{\text{fiber}}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{gravitation}} = \mathbf{H}_{\text{fiber}} &\Leftrightarrow 2dG \frac{m_1 m_2}{b^2} = k \frac{\alpha}{2} = \frac{4\pi^2 2 \left( \frac{2}{5} m_2 r_{\text{lille}}^2 + m_2 d^2 \right) \alpha}{T^2} \frac{\alpha}{2} = \\ \frac{4\pi^2 m_2 \left( \frac{2}{5} r_{\text{lille}}^2 + d^2 \right)}{T^2} \alpha &= \frac{4\pi^2 m_2 \left( \frac{2}{5} r_{\text{lille}}^2 + d^2 \right) S}{T^2 \cdot 2L} = \frac{2\pi^2 m_2 \left( \frac{2}{5} r_{\text{lille}}^2 + d^2 \right) S}{T^2 L} \\ &\Leftrightarrow G = \frac{\pi^2 \left( \frac{2}{5} r_{\text{lille}}^2 + d^2 \right) S b^2}{m_1 T^2 L d} \end{aligned}$$

$G$  indeholder da kun størrelser vi har målt. For overskuelighedens skyld vælger jeg *ikke* at indsætte (3.9) i (3.10).

Her har vi dog begået den systematiske fejl, at hver af de små kugler også bliver påvirket af den fjerne store kugle. Denne kraft skal tælles med to gange, og kaldes  $F_{\text{fejl}}$ . Afstanden mellem en lille kugle og en stor kugle,  $e$ , findes vha. pythagoras' læresætning:

$$e = \sqrt{b^2 + (2d)^2} \Leftrightarrow e^2 = b^2 + 4d^2$$

$$F_{\text{fejl}} = 2 \cdot G \frac{m_1 m_2}{e^2} = 2G \frac{m_1 m_2}{b^2 + 4d^2}$$

Denne kraft må have en komponent,  $F_{\text{fejl}, x}$  i modsat retning af  $F$ , den kraft der virker mellem den lille kugle, og den af de store der er tættest på. Denne må kunne findes som  $F_{\text{fejl}}$  ganget med sinus til vinklen. Vi kender ikke vinklen, men alle sider, så vi får i stedet:

$$F_{\text{fejl, x}} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 4d^2}} \cdot 2G \frac{m_1 m_2}{b^2 + 4d^2} = 2G \frac{m_1 m_2 b}{(b^2 + 4d^2) \sqrt{b^2 + 4d^2}}$$

Lad  $F_{\text{fejl, x}}$  være en procentdel  $\beta$  af  $F$ :

$$\beta = \frac{F_{\text{fejl, x}}}{F} = \frac{2G \frac{m_1 m_2 b}{(b^2 + 4d^2) \sqrt{b^2 + 4d^2}}}{2G \frac{m_1 m_2}{b^2}} \cdot 100\% = \frac{b^3}{(b^2 + 4d^2) \sqrt{b^2 + 4d^2}} \cdot 100\%$$

Vi skal da gange vores værdi for  $G$  med en faktor  $\beta$ , og lægge dette produkt til det oprindelige resultat.

For at ligning (3.3) gælder, kræver det, at vi har en symmetrisk forsøgsopstilling. Det betyder, at afstanden mellem den lille og den store kugles centrum skal være den samme i position I og II. Denne afstand har vi kaldt  $b$ . Der har desværre været en del problemer med apparaturet på Niels Bohr Institutet, hvorfor jeg ikke har fået udført eksperimentet i første forsøg. I andet forsøg var fiberen blevet forskudt. Det skal forstås således, at fiberen har en position, hvor den intet kraftmoment på stangen udøver. For at vores opstilling er symmetrisk må denne stilling være i midten. Denne stilling var blevet forskudt, hvorfor at symmetrien i vores opstilling blev brudt. Dette gjorde resultaterne meget upræcise. Under vejledning af lektor Mogens Levinsen blev vi enige om, at det ikke var muligt inden for en overskuelig tidsramme at reparere apparaturet, og pga. fremskreden tid, var det ikke muligt for mig at vende tilbage endnu en gang. Mogens Levinsen bekræftede i øvrigt mine observationer.

Jeg valgte dog at fortsætte målingerne, og resultaterne ses nedenfor.

**Måledata og databehandling:** Følgende størrelser er blevet målt:

Symbol	størrelse
$T^*$	152 s
$L^*$	7,900 m
$r_{\text{stor}}$	31,5 mm
$r_{\text{lille}}$	7,5 mm
$d$	50 mm
$c_{\text{glas}}$	30 mm
$c_{\text{metal}}$	25 mm
$S$	7 mm
$m_I^*$	1,498 kg
$b$	47 mm

Størrelser markeret med \* er gennemsnitsværdier, og alle målinger findes i bilaget.

$b$  beregnes:

$$b = r_{\text{stor}} + \frac{1}{2} \left( c_{\text{glas}} - \frac{Sd}{2L} \right) = 31,5 \text{ mm} + \frac{1}{2} \left( 30 \text{ mm} - \frac{7 \text{ mm} \cdot 50 \text{ mm}}{2 \cdot 7900 \text{ mm}} \right) = 47 \text{ mm}$$

Vi har nu nok data til at bestemme  $G$ . Vi husker at bruge SI-enheder.

$$G = \frac{\pi^2 \left( \frac{2}{5} r_{\text{lille}}^2 + d^2 \right) S b^2}{m_I T^2 L d} = \frac{\pi^2 \left( \frac{2}{5} \cdot (0,0075 \text{ m})^2 + (0,050 \text{ m})^2 \right) 0,007 \text{ m} \cdot (0,047 \text{ m})^2}{1,498 \text{ kg} \cdot (152 \text{ s})^2 \cdot 7,900 \text{ m} \cdot 0,050 \text{ m}} =$$

$$2,816 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^5}{\text{kg} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^2} = 2,816 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Vi udregner  $\beta$ . Vi behøver her ikke regne i SI-enheder, da denne størrelse er enhedsløs, og kun indeholder mm som enhed:

$$\beta = \frac{b^3}{(b^2 + 4d^2) \sqrt{b^2 + 4d^2}} \cdot 100\% = \frac{(47 \text{ mm})^3 \cdot 100\%}{\left( (47 \text{ mm})^2 + 4(50 \text{ mm})^2 \right) \sqrt{(47 \text{ mm})^2 + 4(50 \text{ mm})^2}} \Leftrightarrow$$

$$\beta = 7,70\%$$

Vi finder nu den korrigerede værdi for  $G$ .

$$G_{\text{korrigeret}} = G \cdot \beta + G = 2,816 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot 7,70\% + 2,816 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} =$$

$$3,03 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Vi har nu gjort, hvad der er teoretisk muligt for at udbedre fejlen, som opstod på grund af manglende symmetri. Tabelværdien for  $G$  er:

$$G = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Vores afvigelse er da 55%. Det er ærgerligt, at jeg på grund af den korte tid ikke havde mulighed for at udføre eksperimentet mere end to gange. Skulle jeg senere udføre eksperimentet endnu en gang findes teorien dog udførligt beskrevet i denne opgave.

**Måling af tyngdeaccelerationen på Jorden:** Galilei fandt, at alle legemer falder lige hurtigt. De er desuden udsat for en konstant acceleration, som vi kalder for tyngdeaccelerationen og benævner med  $g$ .  $g$  kan findes på mange måder, men jeg har valgt tre eksperimenter til at bestemme  $g$ .

Det var også Galilei der fandt, at legemer tilbagelægger en afstand proportional med kvadratet på tiden. Dette er efter Newton og hans integralregning ikke svært at vise:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow x = \iint a dt dt = \int at + v_0 dt = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0$$

I alle eksperimenter jeg udfører, er både  $v_0$  og  $x_0$  lig 0. Vi kan derfor skrive (5.1) som:

$$x = \frac{1}{2} at^2$$

Hvilket var hvad Galilei viste.

Tyngdeaccelerationens tabelværdi er ifølge DATABOG Fysik og Kemi 2003 i Danmark  $9,815\text{ms}^{-2}$ .

**Det frie fald:** Den mest nærliggende måde at bestemme tyngdeaccelerationen må være at lade en massiv genstand falde frit. Man skal da blot overveje, hvorledes man måler dens position/fart/acceleration på bedst mulig måde. Jeg har lavet to eksperimenter, der direkte benytter sig af frit fald. Det ene bruger et videokamera til måling af positionen, mens det andet bruger en timerstrimmel. For begge forsøg gælder, at jeg ikke har kunnet formindske luftmodstanden. Da luftmodstanden virker bremsende kan vi forvente at få en værdi for  $g$ , der ligger under tabelværdien.

**Timerstrimmel:** En timer er et apparat, som sætter 100 prikker i sekundet. Man kan da trække en strimmel igennem timeren, og på den måde udvinde informationer omkring denne strimmels bevægelse. Ideen er da, at man fastgør denne strimmel til et tungt lod, som man lader falde frit. Eksperimentet er yderst simpelt af princip, dog er der en række fejlkilder man let kan undgå.

**Udførsel:** Strimlen skal kunne glide gnidningsfrit hen til timeren. Der sørges for, at strimlen er sat godt fast til det lod, man lader falde. Loddet skal være tungt – i dette

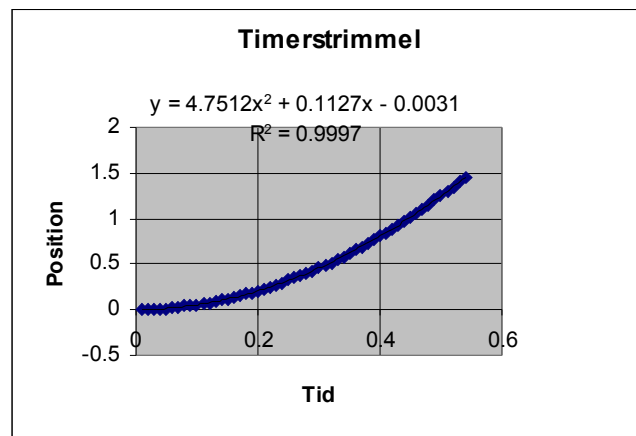
eksperiment var loddets masse 1 kg. Det gælder om at få en så brat acceleration som muligt, hvilket bedst opnås ved at lade loddet hænge i strimlen, fastgøre strimlen, og da pludseligt og med en hurtig bevægelse klippe strimlen over med en saks, frem for selv at holde loddet eller strimlen. Mens loddet hænger i strimlen må det ikke svinge, og man skal være sikker på, at der er nok timerstrimmel til, at loddet kan bevæge sig til det rammer jorden/gulvet samtidigt med, at man stadig får måledata. Det sidste stykke af timerstrimlen forkastes, da loddet da allerede har ramt gulvet. Under eksperimentet blev der taget hensyn til alle ovennævnte detaljer.

**Teori:** Man ved, at der mellem hvert punkt på timerstrimlen er  $1/100$  s, og vi kan måle den tilbagelagte afstand. Vi kan da tegne en  $(t,s)$ -graf. Afstanden blev målt tre gange og præcist med en lineal. Alle tre gange blev de fuldstændigt samme resultater fundet, hvorfor der kun er listet en række punkter. I Excel blev dataene tegnet som graf, og Excel kunne også udføre en potens-regression. Koefficienten for andengradsleddet i vores andengradspolynomium, må være lig  $g/2$ , som det ses af (4.2)

**Måledata og beregninger:** For punkter, graf og forskrift for polynomium se bilag 2. På denne måde blev  $g$  bestemt til:

$$g = 9,67\text{ms}^{-2}$$

Der er medtaget tre cifre, da vi kan måle med en millimeters nøjagtighed, men kun  $1/100$  sekund.



**Diskussion og konklusion:** Vi kan af regressionen se, at punkterne passer perfekt til et andengradspolynomium, og må derfor konkludere, at de kræfter der har indvirket på forsøget, må have været konstante, da de har medført en konstant (negativ) acceleration.



Det kan kun have været friktionskræfter – luftmodstanden og gnidningen mellem strimmel og timer – som har spillet en rolle. Ikke desto mindre er det lykket os at udføre et vellykket forsøg, hvor det til fulde er vist, at legemer falder med konstant acceleration. Vores afvigelse er 1,44 %.

**Fotokamera, udførsel:** Med det tyske computerprogram VIdeo ANALyse<sup>1</sup> er det muligt at analysere film. Programmet gav mulighed for både manuelt at lokalisere den genstand, hvis position ønskes bestemt, men har også en automatisk funktion, der lokaliserer efter farve. Både for den automatiske analyses skyld, men også den manuelle, er det en stor fordel, hvis objektet klart kan skelnes fra baggrunden. Man havde kun et digitalt fotokamera til rådighed, hvor lukketiden er knap så god som på et digitalt videokamera. Det gav derfor ingen mening at lade legemet falde fra stor højde, da det blot ville få for høj hastighed, og da ikke længere ville være mulig at lokalisere. Gennem småforsøg findes, at 40 cm passede godt.

**Teori:** Eksperimentets absolutte fordel er, at man ingen kontakt til legemet har. Der virker derfor *kun* luftmodstand på legemet. Der blev benyttet et stativ, hvor en grøn bold kunne fastsættes, og da ved tryk på en knap pludselig løsnes og derved påbegynder sit fald. På grund af den lave faldhøjde var der ikke tid til, at flere end syv billede kunne optages inden bolden ramte bordpladen, hvorfor at der kun er medtaget disse syv målinger i alle fire målinger.

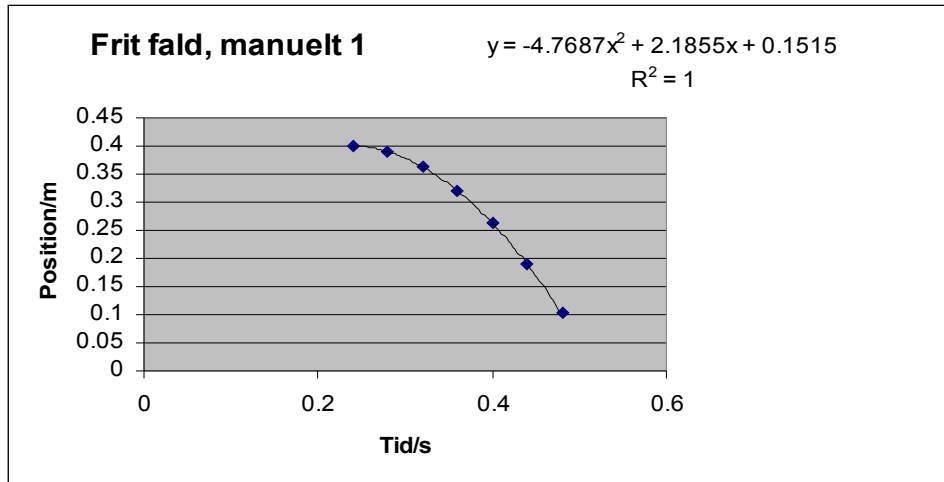
**Måledata og beregninger:** Der blev udført henholdsvis to manuelle og to automatiske målinger. Alle disse målinger er gengivet i bilag 2 til 5. Fælles for disse målinger er, at de alle sammen har  $R^2$ -værdi på 0,9999 eller højere. Ligesom for timerstrimlen blev punkterne indsat på en graf, og der blev da udført en potens-regression. Også her skal vi gange koefficienten til andengradsleddet ganges med 2 for at gå  $g$ . Gennemsnitsværdien for de fire forsøg er:

$$g = 9,55 \text{ ms}^{-2}$$

Her findes afvigelsen til at være 2,70 %.

---

<sup>1</sup> Se kildeliste for mere information



**Det matematiske pendul:** en måde at undgå luftmodstanden ved bestemmelse af tyngdeacceleration er at bruge det matematiske pendul. Man kan, som vi vil se under teorien til dette eksperiment, approksimere bevægelsesligningen for det matematiske pendul for små udsving. Da vi kan har med små udsving at gøre vil hastigheden være lille, hvorfor vi kan negligere luftmodstanden.

**Udførsel:** En lille og kompakt masse hænges op i to stærke, ikke strækbare snore (sytråd), således, at bevægelse kun var mulig i én retning. Ved hjælp af en vinkelmåler kontrolleres, at vinklen mellem de to snore og ophænget var den samme, hvorfor snorene nødvendigvis må have været lige lange. Derefter sættes pendulet i svingning med et udsving på mellem tre og syv grader. Svingningstiden  $T$  måles ved at måle hhv. 20 udsving og 10 udsving. Begge målinger udføres tre gange.

**Teori:** Den resulterende kraft på pendul er snorekraften og tyngdekraften. Snorekraften trækker ind mod det fiktive ophængspunkt – midt imellem de to virkelige ophængspunkter – og dette modvirker tyngdekraften, men der er også en komponent af tyngdekraften, som er rettet imod bevægelsesretningen, kaldet  $F$ :

$$F = -mg \sin \varphi$$

Hvor  $\varphi$  er udslagsvinklen. For små vinkler gælder, at buestykket  $x$  kan betragtes som en linie med længde  $\varphi L$ , hvor  $L$  er længde fra det fiktive ophængspunkt til loddet massemidtpunkt, samt at  $\sin \varphi = \varphi$ . Vi får da:

$$ma = -mg \sin \varphi \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -g \sin \varphi \Leftrightarrow \frac{d^2\varphi L}{dt^2} = -g\varphi \Leftrightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{L}\varphi$$

Vi er kun interesserede i svingningstiden og tyngdeaccelerationen, hvorfor vi ikke opskriver den fuldstændige løsning, men blot ser, at vinkelhastigheden  $\omega$  er fundet til:

$$\omega^2 = \frac{g}{L}, T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 L}{g} \Leftrightarrow g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

Loddet som blev brugt er cylindrisk, hvorfor dets massemidtpunkt må være halvdelen af dets højde under ophængen, kaldet  $h_{\text{lod}}$ . De to snores længder blev målt, samt afstanden mellem deres ophæng. Udfra dette og vha. pythagoras' læresætning blev  $L_{\text{ophæng}}$  fundet. Dertil adderes den halve højde. Alle værdier er målt tre gange, og jeg vil her kun anføre deres gennemsnitsværdier.  $L_{\text{ophæng}}$  er gennemsnittet af resultatet af  $L_{\text{ophæng}}$  udfra begge snores længder.  $L$  må da være summen af  $L_{\text{ophæng}}$  og  $h_{\text{lod}}$ .

**Måledata og databehandling:** Se alle målinger i bilag 6.

$L_{\text{ophæng}}$	$h_{\text{lod}}$	$L$	$T$
109,8 cm	1,9 cm	111,7 cm	2,12 s

$g$  findes da:

$$g = \frac{4\pi^2 1,117\text{m}}{(2,12\text{s})^2} = 9,81\text{ms}^{-2}$$

Dette er en afvigelse på 0,05 % af tabelværdien.

**Diskussion og konklusion:** Som forventet fandt vi en utrolig nøjagtig værdi, da ingen nævneværdige yder kræfter har indflydelse på loddets bevægelse.

**Konklusion på eksperimenter til bestemmelse af tyngdeaccelerationen:** Den store fjende, når man ønsker at bestemme tyngdeaccelerationen er luftmodstanden. I de to første forsøg er luftmodstanden den overvejende, hvis ikke eneste grund til afvigelse. Disse forsøg viser os dog, at luftmodstanden har været konstant for disse lave hastigheder. De værdier for tyngdeaccelerationen vi finder er desuden ikke særlig langt fra tabelværdien. Timerstrimlen giver os mulighed for at aflæse mere præcist, da den ikke har samme begrænsning som videokameraet har i kraft af sin lukketid. Dette omgik vi dog delvist ved at lade loddet falde fra ringe højde under eksperimentet med fotokameraet. Desværre var vores lod ikke tungt nok til at overvinde luftmodstanden i

samme grad. Med et professionelt videokamera og et tungere lod, ville denne metode være mere præcis end timerstrimlen, men ikke i et skoleforsøg.

Men hvorfor er resultat fra fotokameraet *mindre end* det vi har fundet vha. timerstrimlen, når vi nu har konkluderet, at der på timerstrimmel *ud over* luftmodstand også er en modstand, når strimlen glider gennem timeren, og der kun er luftmodstand på det filmede frie fald? Forklaringen har to aspekter. For det første kan det selvfølgelig være, at timeren sætter 102 prikker i stedet for 100 prikker i sekundet, hvilket ville gøre, at tyngdeaccelerationen ville blive minimalt større. Mere sandsynligt er det dog, at luftmodstanden havde større indflydelse i det filmede frie fald. Det lod der blev kastet ud fastgjort i timerstrimlen havde en masse på 1 kg, og havde form som en meget aflang cylinder, hvorimod den bold der blev filmet havde en masse på omkring 20 g, og var kugleformet, hvorfor det lyder rigtigt, at luftmodstanden kan have minimalt større indflydelse. Bortset fra det, må man sige, at begge målinger er ret præcise.

Anderledes er det med det matematiske pendul. Vi fandt en værdi, der var så tæt på den virkelige, at vi kan være godt tilfredse. Her er vores største fjende – luftmodstanden – fjernet, uden at det har betydet, at vores måle nøjagtighed er faldet. Ved udsving på mindre end  $3^\circ$  tager det loddet mellem to og tre timer at falde til ro. Dette viser os, at dæmpningen forårsaget af luften er ubetydelig.

I praksis bruges et penduls svingningstid ofte til bestemmelse af tyngdeaccelerationen. Geologer flyver hen over landskaber, mens de måler svingningstiden, og kan på den måde udvinde præcise data om Jordens indres opbygning. **Overordnet konklusion:** Denne opgave har til formål at fremlægge teorien bag Cavendish' eksperiment, således at det er muligt for en person med fysik på højniveau at forstå de fysiske overvejelser bag eksperimentet. Som sidste led i dette ønskedes en bestemmelse af gravitationskonstanten, hvilket dog viste sig at volde større praktiske problemer.

Man ønskede også en bestemmelse af tyngdeaccelerationen, hvilket blev gjort med tre forskellige metoder som baggrund. Alle gav de brugbare resultater, dog udmærkede det matematiske pendul sig ved sin præcision.

**Bilagsfortegnelse:**

<b>Bilag 1, måledata for Cavendish' eksperiment.....</b>	<b>22</b>
<b>Bilag 2, måledata for timerstrimmel.....</b>	<b>23</b>
<b>Bilag 3, måledata for frit fald, manuel genkendelse 1.....</b>	<b>24</b>
<b>Bilag 4, måledata for frit fald, manuel genkendelse 2.....</b>	<b>25</b>
<b>Bilag 5, måledata for frit fald, automatisk genkendelse 1.....</b>	<b>26</b>
<b>Bilag 6, måledata for frit fald, automatisk genkendelse 2.....</b>	<b>27</b>
<b>Bilag 7, måledata for matematisk pendul.....</b>	<b>28</b>

### Bilag 1, måledata for Cavendish' eksperiment.

Målinger hvorpå gennemsnittet er blevet udregnet.

$T_1$	156 s
$T_2$	155s
$T_3$	148 s
$T_4$	151 s
$T_5$	150 s

$L_1$	7,899 m
$L_2$	7,902 m
$L_3$	7,899 m

Der er to store kugler. Deres gennemsnitsvægt er taget med:

$m_{1,a}$	1,498 kg
$m_{1,b}$	1,497 kg

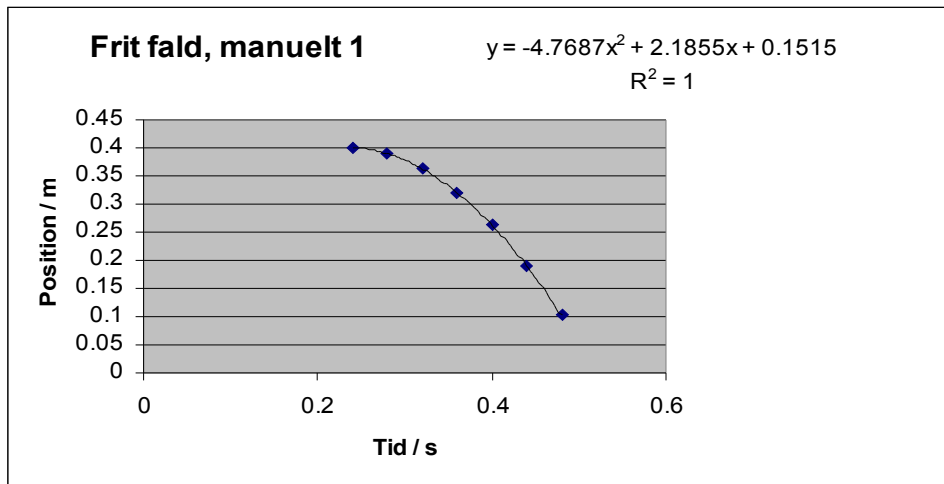
## Bilag 2, måledata for timerstrimmel

t/s	x/m	t/s	x/m
0.01	0.001	0.28	0.402
0.02	0.002	0.29	0.429
0.03	0.005	0.30	0.458
0.04	0.008	0.31	0.488
0.05	0.012	0.32	0.518
0.06	0.017	0.33	0.551
0.07	0.023	0.34	0.585
0.08	0.038	0.35	0.619
0.09	0.047	0.36	0.654
0.10	0.057	0.37	0.691
0.11	0.069	0.38	0.727
0.12	0.081	0.39	0.766
0.13	0.094	0.40	0.805
0.14	0.108	0.41	0.846
0.15	0.122	0.42	0.886
0.16	0.137	0.43	0.929
0.17	0.153	0.44	0.973
0.18	0.170	0.45	1.016
0.19	0.188	0.46	1.061
0.20	0.207	0.47	1.107
0.21	0.228	0.48	1.153
0.22	0.251	0.49	1.201
0.23	0.275	0.50	1.250
0.24	0.298	0.51	1.301
0.25	0.323	0.52	1.350
0.26	0.347	0.53	1.401
0.27	0.375	0.54	1.453

**Bilag 3, måledata for frit fald, manuel genkendelse 1:**

t /s	y /m
0.24	0.40103
0.28	0.39022
0.32	0.36242
0.36	0.32020
0.40	0.26255
0.44	0.18996
0.48	0.10193

g=	9.5374
----	--------

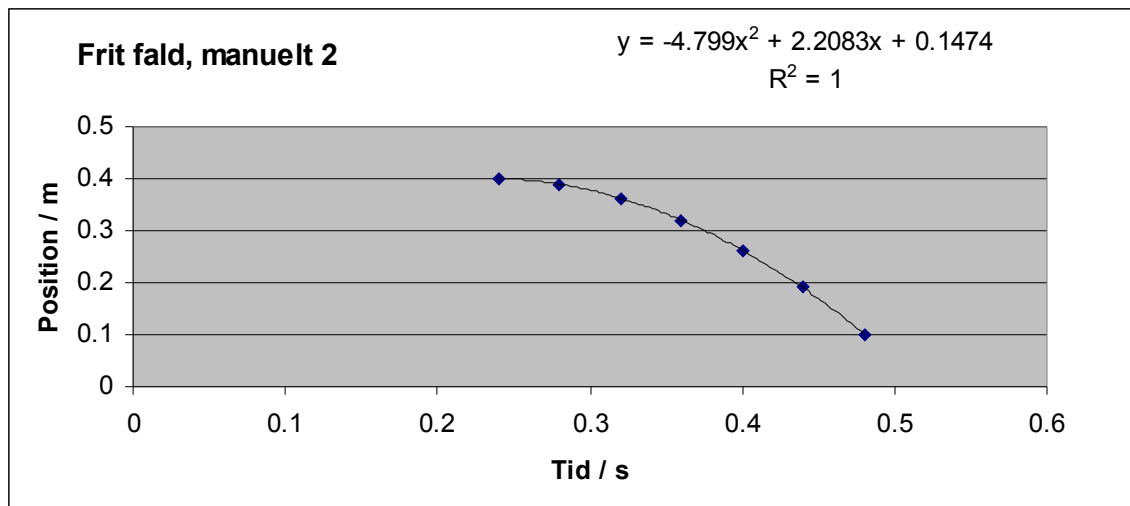




**Bilag 4, måledata for frit fald, manuel genkendelse 2:**

t /s	y /m
0.24	0.40103
0.28	0.38919
0.32	0.36345
0.36	0.3202
0.4	0.26203
0.44	0.19099
0.48	0.10142

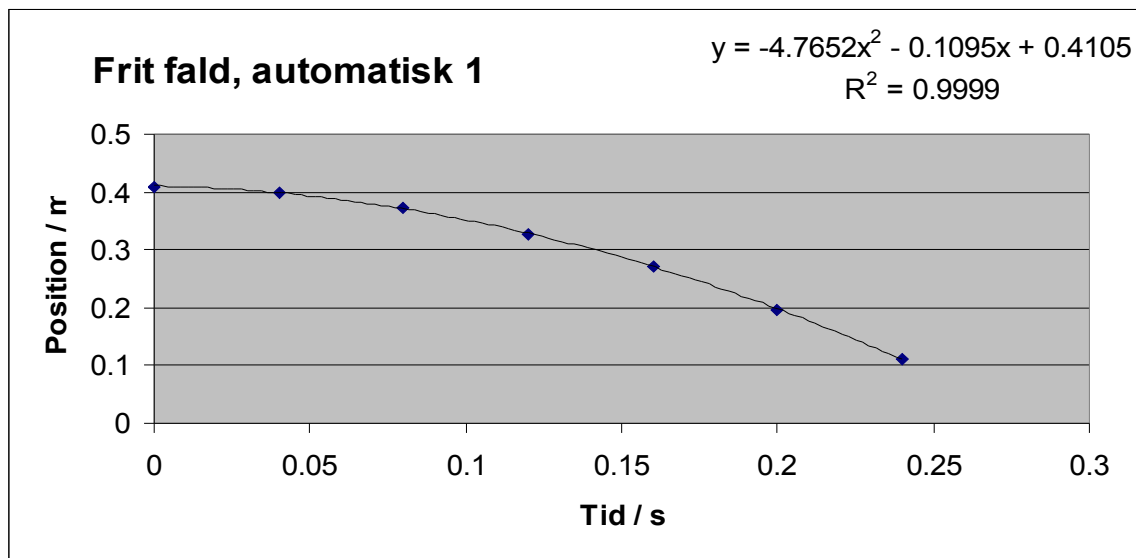
g=	9.598
----	-------



**Bilag 5, måledata for frit fald, automatisk genkendelse 1:**

t /s	y /m
0	0.40925
0.04	0.4
0.08	0.37225
0.12	0.32832
0.16	0.27052
0.2	0.19653
0.24	0.11098

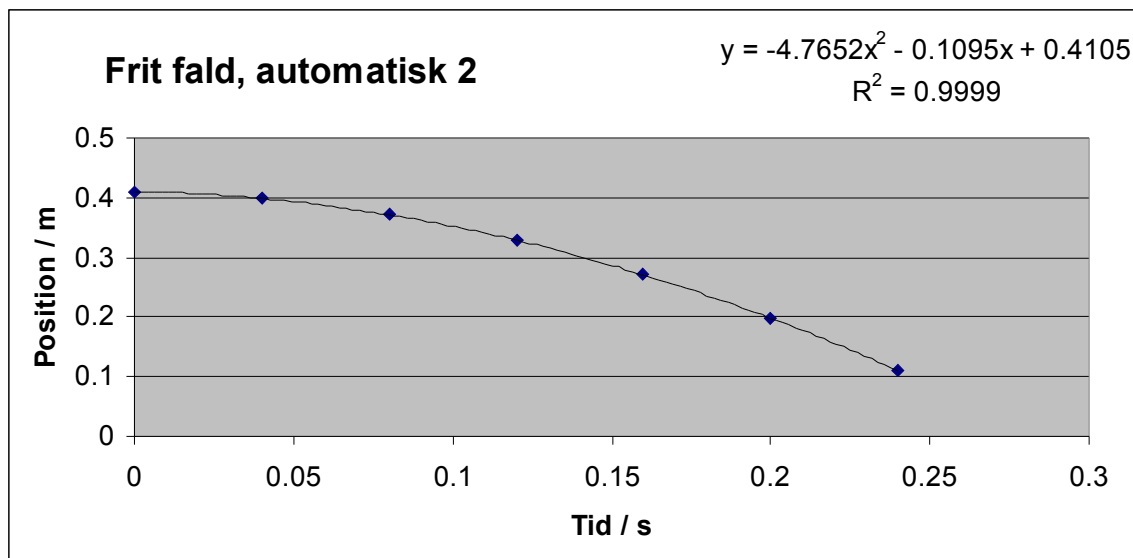
g=	9.5304
----	--------



### Bilag 6, måledata for frit fald, automatisk genkendelse 2:

t /s	y /m
0	0.40925
0.04	0.4
0.08	0.37225
0.12	0.32832
0.16	0.27052
0.2	0.19653
0.24	0.11098

g=	9.5304
----	--------



Forskellen på automatisk 1 og 2 er, at computer i 1 målte på en farve nuance med en hvis tolerance, hvor tolerance i 2 var sat en anelse op. Som vi ser gjorde dette ingen forskel.

### Bilag 7, måledata for matematisk pendul:

I følgende serie blev svingningstiden målt 20 gange:

$T_{20}/s$	$T_1/s$
42,47	2,12
42,55	2,13
42,44	2,12

$$T_{1,gen,a} = 2,12 \text{ s}$$

I følgende serie blev svingningstiden målt 10 gange:

$T_{10}/s$	$T_1/s$
21,15	2,12
21,30	2,13
21,18	2,12

$$T_{1,gen,b} = 2,12 \text{ s}$$

$$T_{1,gen} = 2,12 \text{ s}$$

	$S_1/cm$	$S_2/cm$	$A/cm$	$h_{lod}/cm$
måling 1	112,0	111,8	43,7	2,0
måling 2	111,8	111,8	43,7	1,9
måling 3	112,2	111,7	43,4	1,9
gennemsnit	112,0	111,8	43,6	1,9

$S_1$  og  $S_2$  betegner de to snores længde,  $A$  afstanden imellem deres ophæng, og  $h_{lod}$  loddet halve højde.

$L_{ophæng}$  findes da på følgende måde:

$$L_{ophæng} = \frac{\sqrt{112,0\text{cm}^2 - \left(\frac{43,6\text{cm}}{2}\right)^2} + \sqrt{111,8\text{cm}^2 - \left(\frac{43,6\text{cm}}{2}\right)^2}}{2} = 109,8\text{cm}$$

# Kildefortegnelse:

## Videnskabelige Kilder:

**Brydesholt, Morten m.fl.:** *Orbit 3* (2000), Systime, Danmark.

**Christiansen, Gunnar & Both, Erik; Østergaard Sørensen, Preben:** *Mekanik* (2000), Institut for Fysik, DTU, Danmark.

**Einstein, Albert & Infeld, Leopold:** *Det moderne Verdensbillede – fysikkens Udvikling fra Galilei og Newton til Relativitetsteori og Kvantemekanik*, (1939), J.H. Schultz Forlag, København.

**Knudsen, Jens Martin & Hjorth, Poul Georg:** *Elements of Newtonian Mechanics*, Third Edition (2000), Springer Verlag, Tyskland.

**Young, H.D. & Freedman, R.A.:** *University Physics*, tenth edition, Addison-Wesley Longman Inc. (2000).

## Videoanalyseprogram:

**Kersting, Thomas:** om VIANA set den 31. januar 2004 på:

<http://agnes.dida.fysik.uni-essen.de/viana/>

## Historiske kilder:

### Om Henry Cavendish:

**Shamos, M:** *Great Experiments in Physics* (Dover Publications Inc., New York, 1987) gengivet og set den 31. januar 2004 på:

[http://wise.fau.edu/~jordanrg/bios/Cavendish/Cavendish\\_bio.htm](http://wise.fau.edu/~jordanrg/bios/Cavendish/Cavendish_bio.htm)

### Om Isaac Newton, Nicolas Kopernikus, Johannes Kepler og Tyche Brahe:

**Knudsen, Jens Martin & Hjorth, Poul Georg:** *Elements of Newtonian Mechanics*, Third Edition (2000), Springer Verlag, Tyskland.

**Meadows, Jack:** *Store videnskabsmænd* (1988), Politikens Forlag, Danmark.